Nichtstandard-Analysis und deren Anwendung im Mathematikunterricht

Barbara Wieczorek

Friedrich-Schiller-Universität Jena

19. Januar 2010

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Übersicht

1. Einführung
2. Das hyperrelle Zahlensystem
3. Rechenoperationen
4. Anwendung
5. Erfahrungen in der Praxis
6. Gruppenarbeit
7. Fazit

Übersicht

1. Einführung
2. Das hyperrelle Zahlensystem
3. Rechenoperationen
4. Anwendung
5. Erfahrungen in der Praxis
6. Gruppenarbeit
7. Fazit

Historisches

- Schon in der Antike: Versuche, unendlich kleine Einheiten begrifflich und gedanklich zu erfassen

Historisches

- Schon in der Antike: Versuche, unendlich kleine Einheiten begrifflich und gedanklich zu erfassen
- Demokrit: Vergleich der Flächen eines durchgeschnittenen Kegels

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Historisches

- Schon in der Antike: Versuche, unendlich kleine Einheiten begrifflich und gedanklich zu erfassen
- Demokrit: Vergleich der Flächen eines durchgeschnittenen Kegels
- Chrysipp hierzu:
  Die Flächen sind weder gleich noch ungleich.

Historisches

- L'Hospital:

Historisches

- L'Hospital:

  Grant that two quantities, whose difference is an infinitely small quantity, may be taken (or used) indifferently for each other: or (which is the same thing) that a quantity, which is increased or decreased only by an infinitely small quantity, may be considered as remaining the same.

Historisches

- Bernoulli:

Historisches

- Bernoulli:

  Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.

Historiques

- Bernoulli:

  Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.

- Leibniz:

Historisches

- Bernoulli:

  Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.

- Leibniz:

  It will be sufficient if, when we speak of infinitely great ..., or of infinitely small quantities... it is understood that we mean quantities that are indefinitely great or indefinitely small...

Einführung

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Einführung

- Grundgedanke: Verwendung unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen anstelle von Grenzwerten

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Einführung

- Grundgedanke: Verwendung unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen anstelle von Grenzwerten
- Begriffe wie Ableitung und Integral sind ohne Betrachtung von Grenzwertbildungen möglich

Einführung

- Grundgedanke: Verwendung unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen anstelle von Grenzwerten
- Begriffe wie Ableitung und Integral sind ohne Betrachtung von Grenzwertbildungen möglich
- Erste mathematische Fundierung durch Abraham Robinson in den 1960er Jahren

Einführung
Das hyperrelle Zahlensystem
Rechenoperationen
Anwendung
Erfahrungen in der Praxis
Gruppenarbeit
Fazit

Die reellen Zahlen

- Für die reellen Zahlen gilt das archimedische Axiom:

Die reellen Zahlen

- Für die reellen Zahlen gilt das archimedische Axiom:

  Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es eine ganze Zahl n mit $na > 1$.

Die reellen Zahlen

- Für die reellen Zahlen gilt das archimedische Axiom:

  Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es eine ganze Zahl n mit $na > 1$.

- Anschaulich: Durch **endliche** Vergrößerung wird der Abstand einer beliebigen reellen Zahl zur Null jede fest vorgegebene Schranke überschreiten.

Die reellen Zahlen

- Für die reellen Zahlen gilt das archimedische Axiom:

  Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es eine ganze Zahl n mit $na > 1$.

- Anschaulich: Durch **endliche** Vergrößerung wird der Abstand einer beliebigen reellen Zahl zur Null jede fest vorgegebene Schranke überschreiten.

- In der Nichtstandardanalysis wird eine Zahlenmenge verwendet, in der das archimedische Axiom nicht gilt.

Die reellen Zahlen

- Für die reellen Zahlen gilt das archimedische Axiom:

  Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es eine ganze Zahl n mit $na > 1$.

- Anschaulich: Durch **endliche** Vergrößerung wird der Abstand einer beliebigen reellen Zahl zur Null jede fest vorgegebene Schranke überschreiten.
- In der Nichtstandardanalysis wird eine Zahlenmenge verwendet, in der das archimedische Axiom nicht gilt.
- Die reellen Zahlen werden hierbei erweitert.

Übersicht

1. Einführung
2. Das hyperrelle Zahlensystem
3. Rechenoperationen
4. Anwendung
5. Erfahrungen in der Praxis
6. Gruppenarbeit
7. Fazit

Das hyperreelle Zahlensystem

Die Nichtstandardanalysis rechnet mit den sogenannten **hyperrellen** Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{R}^*$. Es gilt:

Das hyperreelle Zahlensystem

Die Nichtstandardanalysis rechnet mit den sogenannten **hyperrellen** Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{R}^*$. Es gilt:

- Axiom I: Jede reelle Zahl ist eine hyperrelle Zahl.

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Das hyperreelle Zahlensystem

Die Nichtstandardanalysis rechnet mit den sogenannten **hyperrellen** Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{R}^*$. Es gilt:

- Axiom I: Jede reelle Zahl ist eine hyperrelle Zahl.
- Axiom der Infinitesimalzahlen: Es gibt hyperrelle Zahlen $\alpha, \alpha \neq 0$, so dass für jede positive reelle Zahl a gilt $-a < \alpha < a$. Eine solche hyperreelle Zahl heißt eine **Infinitesimalzahl**.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Zwei hyperreelle Zahlen x, y heißen **unendlich benachbart**, wenn $x - y$ eine Infinitesimalzahl ist. Schreibweise: $x \approx y$.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Zwei hyperreelle Zahlen x, y heißen **unendlich benachbart**, wenn $x - y$ eine Infinitesimalzahl ist. Schreibweise: $x \approx y$.
- Eine hyperrelle Zahl x heißt **endlich**, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass $-a < x < a$. Andernfalls heißt x **unendlich**.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Zwei hyperreelle Zahlen x, y heißen **unendlich benachbart**, wenn $x - y$ eine Infinitesimalzahl ist. Schreibweise: $x \approx y$.
- Eine hyperrelle Zahl x heißt **endlich**, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass $-a < x < a$. Andernfalls heißt x **unendlich**.
- auf $\mathbb{R}^*$ sind die Operationen $+$ und $\cdot$ erklärt. Hierbei gilt:

Das hyperreelle Zahlensystem

- Zwei hyperreelle Zahlen x, y heißen **unendlich benachbart**, wenn $x - y$ eine Infinitesimalzahl ist. Schreibweise: $x \approx y$.
- Eine hyperrelle Zahl x heißt **endlich**, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass $-a < x < a$. Andernfalls heißt x **unendlich**.
- auf $\mathbb{R}^*$ sind die Operationen $+$ und $\cdot$ erklärt. Hierbei gilt:

  Übereinstimmung mit den Operationen $\cdot$ und $+$ im Reellen.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Wurzelaxiom:

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Das hyperreelle Zahlensystem

- Wurzelaxiom:

  Für jede positive hyperreelle Zahl a und jede positive ganze Zahl n gibt es eine positive hyperrelle Zahl b mit $b^n = a$. Schreibweise: $b = \sqrt[n]{a}$.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Wurzelaxiom:

  Für jede positive hyperreelle Zahl a und jede positive ganze Zahl n gibt es eine positive hyperrelle Zahl b mit $b^n = a$. Schreibweise: $b = \sqrt[n]{a}$.

- Standardanteil-Axiom:

Das hyperreelle Zahlensystem

- Wurzelaxiom:

  Für jede positive hyperreelle Zahl a und jede positive ganze Zahl n gibt es eine positive hyperrelle Zahl b mit $b^n = a$. Schreibweise: $b = \sqrt[n]{a}$.

- Standardanteil-Axiom:

  Für jede endliche hyperreelle Zahl x gibt es genau eine reelle Zahl a mit $x \approx a$; a heißt der **Standardanteil** von x. Schreibweise: $a = st(x)$.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Funktionsaxiom:

Das hyperreelle Zahlensystem

- Funktionsaxiom:

  Jede reelle Funktion f von einer oder mehreren Variablen hat ein Gegenstück $^*f$ in der hyperrellen Welt.

Das hyperreelle Zahlensystem

- Funktionsaxiom:

  Jede reelle Funktion f von einer oder mehreren Variablen hat ein Gegenstück $^*f$ in der hyperrellen Welt.

- Übertragungsaxiom:

Das hyperreelle Zahlensystem

- Funktionsaxiom:

  Jede reelle Funktion f von einer oder mehreren Variablen hat ein Gegenstück $^*f$ in der hyperrellen Welt.

- Übertragungsaxiom:

  Jede Eigenschaft, welche im reellen Zahlsystem in der üblichen mathematischen Sprache formuliert werden kann, gilt auch im hyperreellen System.

Übersicht

1 Einführung

2 Das hyperrelle Zahlensystem

3 Rechenoperationen

4 Anwendung

5 Erfahrungen in der Praxis

6 Gruppenarbeit

7 Fazit

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich

$\alpha - \beta$

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich
$\alpha - \beta$	infinitesimal

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich
$\alpha - \beta$	infinitesimal
$\alpha - B$ oder $B - \alpha$	

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich

$\alpha - \beta$	infinitesimal
$\alpha - B$ oder $B - \alpha$	unendlich

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich

$\alpha - \beta$	infinitesimal
$\alpha - B$ oder $B - \alpha$	unendlich
$A - B$	

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Addition und Subtraktion (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowei A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha + \beta$	infinitesimal
$\alpha + b$ oder $b + \alpha$	endlich, nicht infinitesimal
$\alpha + B$ oder $B + \alpha$	unendlich
$\alpha - \beta$	infinitesimal
$\alpha - B$ oder $B - \alpha$	unendlich
$A - B$	infinitesimal, endlich oder unendlich

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich

α / β

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich
α / β	infinitesimal, endlich oder unendlich

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich

α / β	infinitesimal, endlich oder unendlich
a / B	

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich

α / β	infinitesimal, endlich oder unendlich
a / B	infinitesimal

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich

α/β	infinitesimal, endlich oder unendlich
a/B	infinitesimal
B/a	

Multiplikation und Division (exemplarisch)

Seien α, β Infinitesimalzahlen, a, b endlich und nicht infinitesimal sowie A, B unendliche Hyperzahlen. Dann gilt

$\alpha \cdot \beta$	infinitesimal
$\alpha \cdot b$ oder $b \cdot \alpha$	infinitesimal
$A \cdot B$	unendlich

α / β	infinitesimal, endlich oder unendlich
a/B	infinitesimal
B/a	unendlich

Übersicht

1. Einführung
2. Das hyperrelle Zahlensystem
3. Rechenoperationen
4. Anwendung
5. Erfahrungen in der Praxis
6. Gruppenarbeit
7. Fazit

Stetigkeit

- Klassische ε-δ-Definition der Stetigkeit von f im Punkte a:

Stetigkeit

- Klassische ε-δ-Definition der Stetigkeit von f im Punkte a:
$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x : |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Stetigkeit

- Klassische ε-δ-Definition der Stetigkeit von f im Punkte a:
$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x : |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

- Nichtstandard-Version:

Stetigkeit

- Klassische ε-δ-Definition der Stetigkeit von f im Punkte a:

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- Nichtstandard-Version:

f stetig in $a :=\forall x_* \in^* \mathbb{R}^*$: $x_* \approx a \Rightarrow f(x_*) \approx f(a)$

Stetigkeit

- Klassische ε-δ-Definition der Stetigkeit von f im Punkte a:

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- Nichtstandard-Version:

  f stetig in $a := \forall x_* \in^* \mathbb{R}^*$: $x_* \approx a \Rightarrow f(x_*) \approx f(a)$

  Anschaulich: Eine unendlich kleine Abänderung der Variablen bewirkt höchstens eine unendlich kleine Abänderung der Funktion selbst.

Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Sei nun $\alpha \approx 0$, aber $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Sei nun $\alpha \approx 0$, aber $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$f(\alpha) = 0 \text{ und somit gilt nicht}$$

Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Sei nun $\alpha \approx 0$, aber $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$f(\alpha) = 0 \text{ und somit gilt nicht } f(\alpha) \approx f(0)$$

Beispiel

Betrachte die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Sei nun $\alpha \approx 0$, aber $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$f(\alpha) = 0 \text{ und somit gilt nicht } f(\alpha) \approx f(0)$$

Damit ist f im Punkt 0 nicht stetig.

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Differenzierbarkeit

- Klassische Definition der Ableitung von f im Punkte x:

Differenzierbarkeit

- Klassische Definition der Ableitung von f im Punkte x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(im Falle der Existenz des Limies)

Differenzierbarkeit

- Klassische Definition der Ableitung von f im Punkte x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  (im Falle der Existenz des Limies)

- Nichtstandard-Definition:

Differenzierbarkeit

- Klassische Definition der Ableitung von f im Punkte x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(im Falle der Existenz des Limies)

- Nichtstandard-Definition:

f ist diff'bar in x mit Ableitung $f'(x)$:

$$\forall |h_*| << 1 : \frac{f(x+h_*) - f(x)}{h_*} \approx f'(x)$$

mit eindeutigem $f'(x)$.

Differenzierbarkeit - Beispiele

- $f(x) = x^2$

Differenzierbarkeit - Beispiele

- $f(x) = x^2$

  Sei $|h| << 1$; dann gilt:

Differenzierbarkeit - Beispiele

- $f(x) = x^2$

  Sei $|h| << 1$; dann gilt:

$$f'(x) \approx \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Differenzierbarkeit - Beispiele

- $f(x) = x^2$

  Sei $|h| << 1$; dann gilt:

  $$f'(x) \approx \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h \approx 2x$$

Integrierbarkeit

Das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ existiert und hat den Wert $F \in \mathbb{R}$, wenn f stetig und wenn für alle $h \approx 0$ und $\psi >> 1$ mit $h \cdot \psi = b - a$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{\psi} f(a + k \cdot h) \cdot h \approx F$.

Integrierbarkeit

Beispiel:

Integrierbarkeit

Beispiel: $\int\limits_0^1 x dx$

Integrierbarkeit

Beispiel: $\int\limits_0^1 x dx$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\psi} f(0 + k \cdot h) \cdot h = \frac{1}{\psi}(0 + \frac{1}{\psi} + \frac{2}{\psi} + ... + 1)$$

Integrierbarkeit

Beispiel: $\int\limits_0^1 x dx$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\psi} f(0+k\cdot h)\cdot h = \frac{1}{\psi}(0+\frac{1}{\psi}+\frac{2}{\psi}+\ldots+1)$$

$$= \frac{1}{\psi^2}(1+\ldots\psi) = \frac{1}{\psi^2}\frac{\psi(\psi+1)}{2}$$

Integrierbarkeit

Beispiel: $\int\limits_0^1 x dx$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\psi} f(0+k\cdot h)\cdot h = \frac{1}{\psi}(0+\frac{1}{\psi}+\frac{2}{\psi}+...+1)$$
$$= \frac{1}{\psi^2}(1+...\psi) = \frac{1}{\psi^2}\frac{\psi(\psi+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\psi}$$

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Integrierbarkeit

Beispiel: $\int\limits_0^1 x dx$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\psi} f(0 + k \cdot h) \cdot h = \frac{1}{\psi}(0 + \frac{1}{\psi} + \frac{2}{\psi} + ... + 1)$$
$$= \frac{1}{\psi^2}(1 + ...\psi) = \frac{1}{\psi^2}\frac{\psi(\psi+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\psi} \approx \frac{1}{2}$$

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Übersicht

1 Einführung

2 Das hyperrelle Zahlensystem

3 Rechenoperationen

4 Anwendung

5 Erfahrungen in der Praxis

6 Gruppenarbeit

7 Fazit

Unterrichtsversuch von Kathleen Sullivan 1972-1974

Rahmenbedingungen:

Unterrichtsversuch von Kathleen Sullivan 1972-1974

Rahmenbedingungen:

- Schüler: fünf Kurse in fünf unterschiedlichen Schulen im Gebiet Chicago-Milwaukee

Unterrichtsversuch von Kathleen Sullivan 1972-1974

Rahmenbedingungen:

- Schüler: fünf Kurse in fünf unterschiedlichen Schulen im Gebiet Chicago-Milwaukee
- Davon: vier kleine Privatschulen, eine öffentliche high school mit Schülern der "upper middle class"

Unterrichtsversuch von Kathleen Sullivan 1972-1974

Rahmenbedingungen:

- Schüler: fünf Kurse in fünf unterschiedlichen Schulen im Gebiet Chicago-Milwaukee
- Davon: vier kleine Privatschulen, eine öffentliche high school mit Schülern der "upper middle class"
- an drei von fünf Schulen: Kurse mit mathematisch überdurchschnittlich befähigten Schülern; restliche zwei: einziger Calculus-Kurs an jeweiliger Schule

Unterrichtsversuch von Kathleen Sullivan 1972-1974

Rahmenbedingungen:

- Schüler: fünf Kurse in fünf unterschiedlichen Schulen im Gebiet Chicago-Milwaukee
- Davon: vier kleine Privatschulen, eine öffentliche high school mit Schülern der "upper middle class"
- an drei von fünf Schulen: Kurse mit mathematisch überdurchschnittlich befähigten Schülern; restliche zwei: einziger Calculus-Kurs an jeweiliger Schule

$\Rightarrow$ Generell: Schüler des Versuchs nicht repräsentativ für durchschnittliche Schüler, sondern eher überdurchschnittliches Begabungs- und Förderungsniveau

Rahmenbedingungen

- Lehrkräfte: Bereits mehrjährige Erfahrung im Unterrichten der entsprechenden Inhalte nach der Standard-Methode

Rahmenbedingungen

- Lehrkräfte: Bereits mehrjährige Erfahrung im Unterrichten der entsprechenden Inhalte nach der Standard-Methode
- Zeitlicher Ablauf:

Rahmenbedingungen

- Lehrkräfte: Bereits mehrjährige Erfahrung im Unterrichten der entsprechenden Inhalte nach der Standard-Methode
- Zeitlicher Ablauf:
  - Im Schuljahr 1972-73: Unterrichten eines Kurses nach Standard-Methode (Control Group)

Rahmenbedingungen

- Lehrkräfte: Bereits mehrjährige Erfahrung im Unterrichten der entsprechenden Inhalte nach der Standard-Methode
- Zeitlicher Ablauf:
  - Im Schuljahr 1972-73: Unterrichten eines Kurses nach Standard-Methode (Control Group)
  - Im Schuljahr 1973-74: Unterrichten eines Kurses nach Nichtstandard-Methode (Experimental Group)

Rahmenbedingungen

- Lehrkräfte: Bereits mehrjährige Erfahrung im Unterrichten der entsprechenden Inhalte nach der Standard-Methode
- Zeitlicher Ablauf:
  - Im Schuljahr 1972-73: Unterrichten eines Kurses nach Standard-Methode (Control Group)
  - Im Schuljahr 1973-74: Unterrichten eines Kurses nach Nichtstandard-Methode (Experimental Group)
  - Schülergruppen hierbei vergleichbar hinisichtlich mathematischer Fähigkeiten

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Auswertung:

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Auswertung:
Bearbeitung von Aufgabe 3: Beweis für Grenzwerte einer unstetigen Funktion an Unstetigkeitsstelle

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Auswertung:
Bearbeitung von Aufgabe 3: Beweis für Grenzwerte einer unstetigen Funktion an Unstetigkeitsstelle

Unterschiede:

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Auswertung:
Bearbeitung von Aufgabe 3: Beweis für Grenzwerte einer unstetigen Funktion an Unstetigkeitsstelle

Unterschiede:

- Control Group: ca. ein Drittel der Schüler versucht die Aufgabe nicht

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Auswertung:
Bearbeitung von Aufgabe 3: Beweis für Grenzwerte einer unstetigen Funktion an Unstetigkeitsstelle

Unterschiede:

- Control Group: ca. ein Drittel der Schüler versucht die Aufgabe nicht
- Experimental Group: ca. 6 Prozent versuchen die Aufgabe nicht

Resultate

Tabelle 1: Student Responses to Question 3

	Control Group (68 students)	Experimental Group (68 students)
did not attempt	22	4
Standard arguments		
satisfactory proof	2	
correct statements falling short of proof (e.g., one is only concerned with $x \neq 2$)	15	14
Nonstandard arguments		
satisfactory proof		25
incorrect arguments		2

Resultate

Generelle Bereitschaft zum Lösen von Aufgaben auf gesamten Test bezogen

Tabelle 2: Number of students attempting a solution

	Control Group (68 students)	Experimental Group (68 students)
Defining basic concepts	48	52
Computing limits	49	68
Producing proofs	18	45
Applying basic concepts	60	60

Kritische Einschätzung zum Schülertest

Probleme

Kritische Einschätzung zum Schülertest

Probleme

- Tabelle 1 greift Aufgabe mit größtem Unterschied heraus; keine Angaben zur Bearbeitung der restlichen Aufgaben

Kritische Einschätzung zum Schülertest

Probleme

- Tabelle 1 greift Aufgabe mit größtem Unterschied heraus; keine Angaben zur Bearbeitung der restlichen Aufgaben
- Keine Erklärung der Unterschiede in Tabelle 2 (z.B. evtl. intensiveres Erläutern und Üben von Beweismethoden im Nichtstandard-Fall?)

Kritische Einschätzung zum Schülertest

Probleme

- Tabelle 1 greift Aufgabe mit größtem Unterschied heraus; keine Angaben zur Bearbeitung der restlichen Aufgaben
- Keine Erklärung der Unterschiede in Tabelle 2 (z.B. evtl. intensiveres Erläutern und Üben von Beweismethoden im Nichtstandard-Fall?)
- Schülerschaft generell nicht repräsentativ

Lehrerbefragung

Teil 1: Verständnis des Konzeptes der Nichtstandard-Analysis

Lehrerbefragung

Teil 1: Verständnis des Konzeptes der Nichtstandard-Analysis

- Generelle Einschätzung: Unproblematisch, Beantwortung der Fragen positiv hinsichtlich des Einsatzes von Nichtstandard-Analysis

Lehrerbefragung

Teil 1: Verständnis des Konzeptes der Nichtstandard-Analysis

- Generelle Einschätzung: Unproblematisch, Beantwortung der Fragen positiv hinsichtlich des Einsatzes von Nichtstandard-Analysis
- Problem: keine vergleichende Gegenüberstellung beider Konzepte; lediglich Frage nach "Benachteiligung durch Behandlung des NSt.-Konzeptes"

Einführung
Das hyperrelle Zahlensystem
Rechenoperationen
Anwendung
Erfahrungen in der Praxis
Gruppenarbeit
Fazit

Lehrerbefragung

Teil 2: Vergleich der beiden Konzepte

Lehrerbefragung

Teil 2: Vergleich der beiden Konzepte

Vorteile der Nichtstandard-Analysis

Lehrerbefragung

Teil 2: Vergleich der beiden Konzepte

Vorteile der Nichtstandard-Analysis

- leichteres Erlernen der grundlegenden Konzepte

Lehrerbefragung

Teil 2: Vergleich der beiden Konzepte

Vorteile der Nichtstandard-Analysis

- leichteres Erlernen der grundlegenden Konzepte
- Beweise leichter zu erklären und näher an der Intuition

Kritische Einschätzung zur Lehrerbefragung, Gesamteinschätzung

Lehrerfragebogen

Kritische Einschätzung zur Lehrerbefragung, Gesamteinschätzung

Lehrerfragebogen

- Lehrerantworten eher gefühlsmäßige Einschätzung als belegbares Resultat

Kritische Einschätzung zur Lehrerbefragung, Gesamteinschätzung

Lehrerfragebogen

- Lehrerantworten eher gefühlsmäßige Einschätzung als belegbares Resultat
- Hintergrundwissen der Lehrer beeinflusst möglicherweise Einschätzung, Schüler würden u.U. anders empfinden

Kritische Einschätzung zur Lehrerbefragung, Gesamteinschätzung

Einführung
Das hyperrelle Zahlensystem
Rechenoperationen
Anwendung
Erfahrungen in der Praxis
Gruppenarbeit
Fazit

Lehrerfragebogen

- Lehrerantworten eher gefühlsmäßige Einschätzung als belegbares Resultat
- Hintergrundwissen der Lehrer beeinflusst möglicherweise Einschätzung, Schüler würden u.U. anders empfinden

Gesamteinschätzung: Interessante Denkanstöße, die zu weiteren Studien anregen, um Thesen zu untermauern oder zu widerlegen

Übersicht

1. Einführung
2. Das hyperrelle Zahlensystem
3. Rechenoperationen
4. Anwendung
5. Erfahrungen in der Praxis
6. Gruppenarbeit
7. Fazit

Fragen zur Diskussion

Welche Kompetenzen werden durch die Arbeit mit Nichtstandard-Analysis geschult?

Fragen zur Diskussion

Welche Kompetenzen werden durch die Arbeit mit Nichtstandard-Analysis geschult?

Welche Schwierigkeiten können auftreten?

Fragen zur Diskussion

Welche Kompetenzen werden durch die Arbeit mit Nichtstandard-Analysis geschult?

Welche Schwierigkeiten können auftreten?

Welche Schwierigkeiten werden im Vergleich zur gebräuchlichen Vorgehensweise (Grenzwertbildung) vermieden?

Fragen zur Diskussion

Welche Kompetenzen werden durch die Arbeit mit Nichtstandard-Analysis geschult?

Welche Schwierigkeiten können auftreten?

Welche Schwierigkeiten werden im Vergleich zur gebräuchlichen Vorgehensweise (Grenzwertbildung) vermieden?

Wann sind welche Inhalte von der NSA für den Unterricht geeignet bzw. nicht geeignet?

Fragen zur Diskussion

Welche Kompetenzen werden durch die Arbeit mit Nichtstandard-Analysis geschult?

Welche Schwierigkeiten können auftreten?

Welche Schwierigkeiten werden im Vergleich zur gebräuchlichen Vorgehensweise (Grenzwertbildung) vermieden?

Wann sind welche Inhalte von der NSA für den Unterricht geeignet bzw. nicht geeignet?

Wie könnte das ggf. behandelt werden?

Ergebnisse der Diskussion

Kompetenzen:

Ergebnisse der Diskussion

Kompetenzen:

- in hohem Maße geschult:
  mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

Ergebnisse der Diskussion

Kompetenzen:

- in hohem Maße geschult:
  mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.
- Probleme mathematisch lösen durch Übergang zu neuem Zahlensystem $\Rightarrow$ Flexibilität im Denken

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Ergebnisse der Diskussion

Kompetenzen:

- in hohem Maße geschult:
  mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.
- Probleme mathematisch lösen durch Übergang zu neuem Zahlensystem $\Rightarrow$ Flexibilität im Denken
- mathematische Darstellungen verwenden:

Ergebnisse der Diskussion

Kompetenzen:

- in hohem Maße geschult:
  mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.
- Probleme mathematisch lösen durch Übergang zu neuem Zahlensystem $\Rightarrow$ Flexibilität im Denken
- mathematische Darstellungen verwenden:
  Schreibweise unter Umständen weniger fehleranfällig als Notation mit "lim" vor jedem Term (bei letzterem Gefahr des Vergessens)

Ergebnisse der Diskussion

Hauptsächliche Schwierigkeiten:

- Hohes Abstraktionsniveau

Ergebnisse der Diskussion

Hauptsächliche Schwierigkeiten:

- Hohes Abstraktionsniveau
- Anschaulichkeit:
  Problem der Veranschaulichung von "unendlich kleinem"

Ergebnisse der Diskussion

Hauptsächliche Schwierigkeiten:

- Hohes Abstraktionsniveau
- Anschaulichkeit:
  Problem der Veranschaulichung von "unendlich kleinem"
- kurzer Abstand zwischen Einführung eines neuen Zahlensystems und dem rechnerischen Umgang damit schwierig

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

- Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

- Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit
- z. B. beispielhafte Beweise für Ableitungsregeln und Integrationsregeln

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

- Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit
- z. B. beispielhafte Beweise für Ableitungsregeln und Integrationsregeln

Ungeeignet und nicht erforderlich:

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

- Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit
- z. B. beispielhafte Beweise für Ableitungsregeln und Integrationsregeln

Ungeeignet und nicht erforderlich:

- Behandlung des Axiomensystems

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

- Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit
- z. B. beispielhafte Beweise für Ableitungsregeln und Integrationsregeln

Ungeeignet und nicht erforderlich:

- Behandlung des Axiomensystems
- Herleitung sämtlicher verwendeter Formeln, etwa zur Differentiation und Integration (analog zur Standard-Analysis)

Eignung und Behandlung der Inhalte

Grundsätzlich geeignet:

- Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit
- z. B. beispielhafte Beweise für Ableitungsregeln und Integrationsregeln

Ungeeignet und nicht erforderlich:

- Behandlung des Axiomensystems
- Herleitung sämtlicher verwendeter Formeln, etwa zur Differentiation und Integration (analog zur Standard-Analysis)

Zielgruppe: Vorrangig Schüler höherer Jahrgangsstufen, intuitive Herangehensweise möglicherweise auch bei jüngeren Schülern möglich

Einführung

Das hyperrelle Zahlensystem

Rechenoperationen

Anwendung

Erfahrungen in der Praxis

Gruppenarbeit

Fazit

Übersicht

1. Einführung
2. Das hyperrelle Zahlensystem
3. Rechenoperationen
4. Anwendung
5. Erfahrungen in der Praxis
6. Gruppenarbeit
7. Fazit

Fazit

Vergleich der Herangehensweisen:

Fazit

Vergleich der Herangehensweisen:

- Nichtstandardanalysis benötigt Grenzwertbegriff nicht explizit

Fazit

Vergleich der Herangehensweisen:

- Nichtstandardanalysis benötigt Grenzwertbegriff nicht explizit
- Die Einführung des hyperreellen Zahlensystems beinhaltet einen hohen Grad an Abstraktion

Fazit

Vergleich der Herangehensweisen:

- Nichtstandardanalysis benötigt Grenzwertbegriff nicht explizit
- Die Einführung des hyperreellen Zahlensystems beinhaltet einen hohen Grad an Abstraktion
- Einsetzbar unter Umständen bei Schülern, die die komplexen Zahlen kennen

Fazit

Vergleich der Herangehensweisen:

- Nichtstandardanalysis benötigt Grenzwertbegriff nicht explizit
- Die Einführung des hyperreellen Zahlensystems beinhaltet einen hohen Grad an Abstraktion
- Einsetzbar unter Umständen bei Schülern, die die komplexen Zahlen kennen
- Haltung der Mitstudenten in der Diskussion: aufgeschlossen und kritisch abwägend, Tendenz eher zum Zweifel an Einsetzbarkeit in der Praxis

Einführung
Das hyperrelle Zahlensystem
Rechenoperationen
Anwendung
Erfahrungen in der Praxis
Gruppenarbeit
Fazit

Literatur

[1] Laugwitz, D. und Schnitzspan, W. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht. Jahrgang 29, Heft 4, Aug./83, Klett-Verlag.

[2] Sullivan, K.: The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 5 (May, 1976), pp. 370-375.