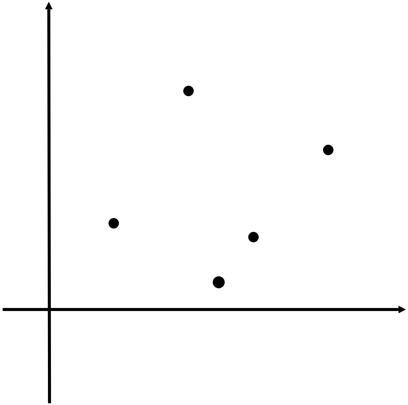
Mathematik und Demokratie

Prof. Vladimir Matveev

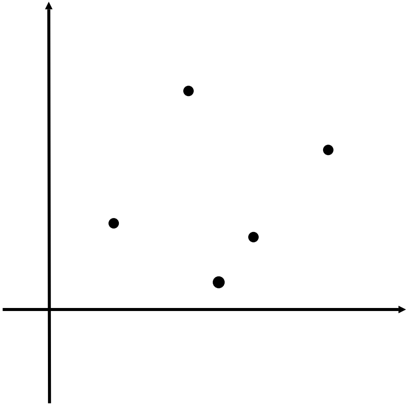
Schülertag 2007, Jena

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

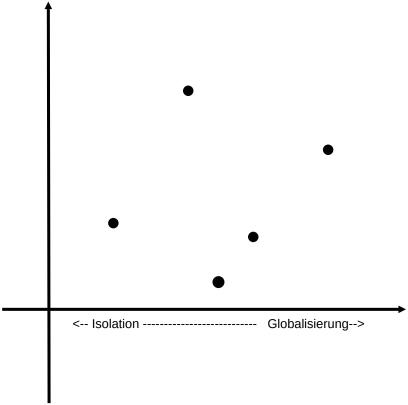


Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



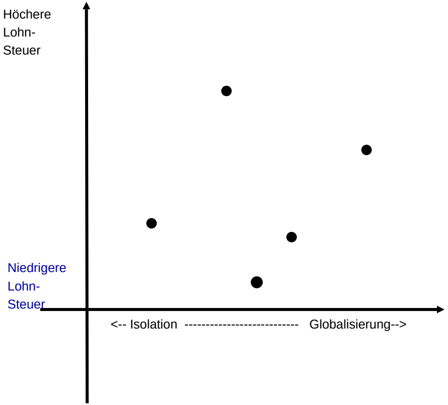
Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



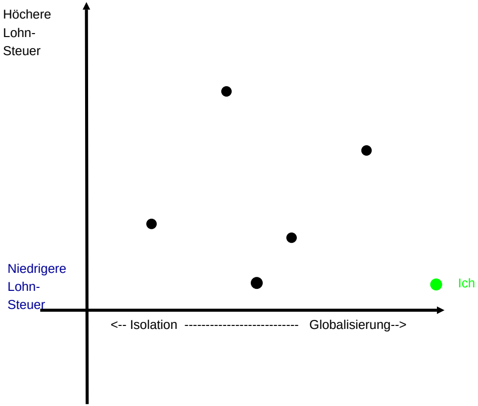
Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



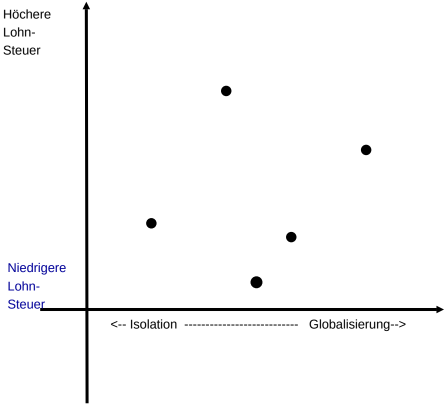
Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

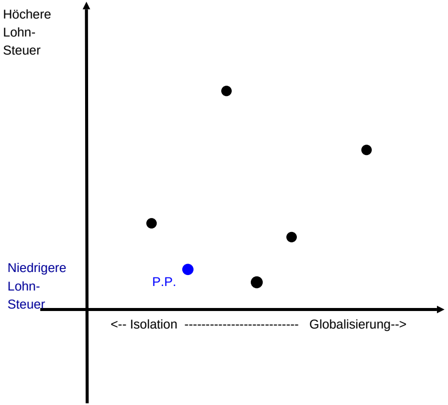
Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

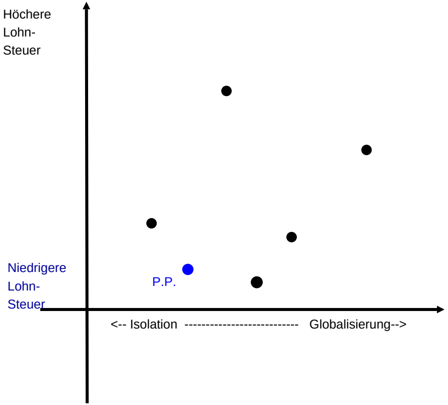
Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

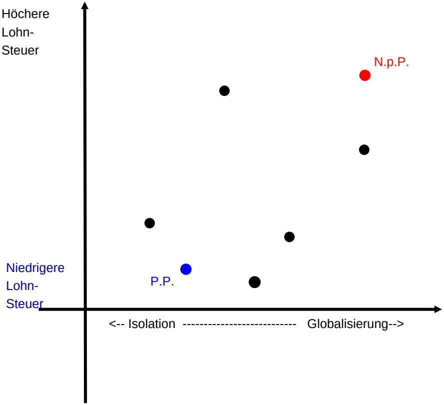


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

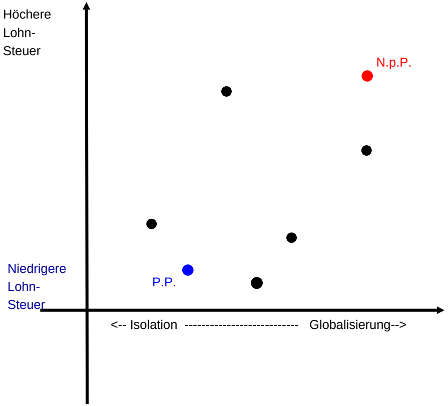


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

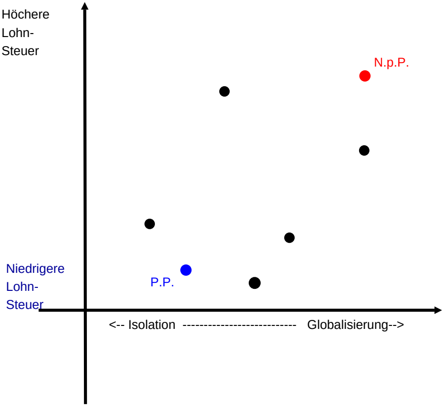


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will,

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

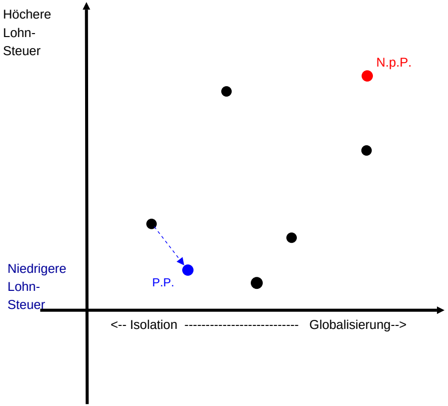


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

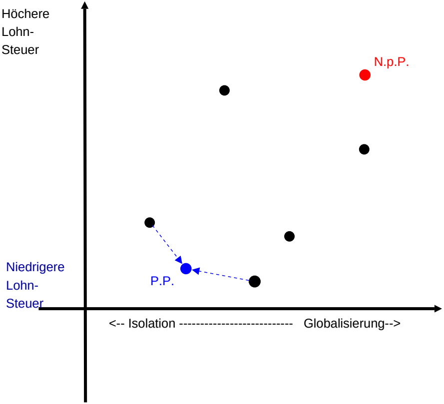


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

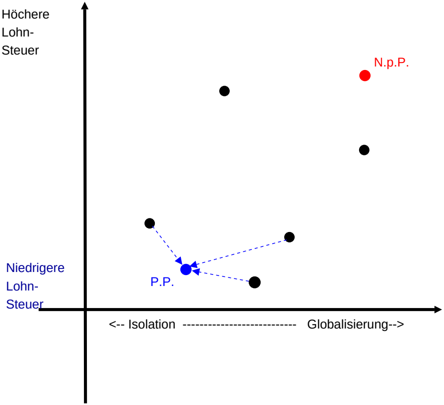


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

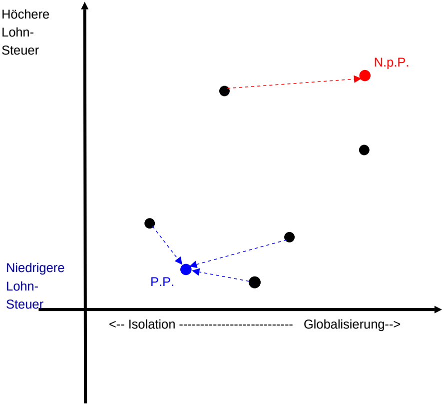


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

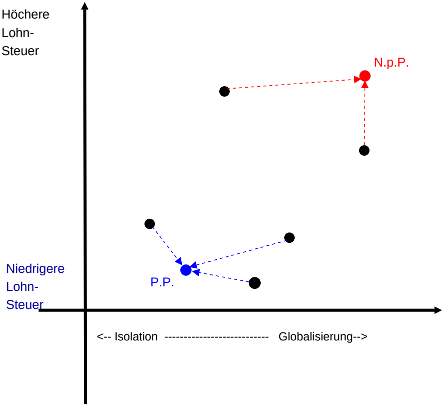


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

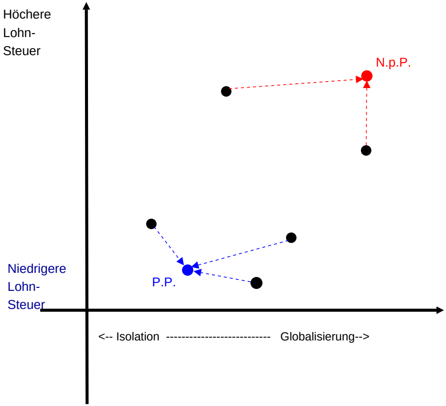


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.

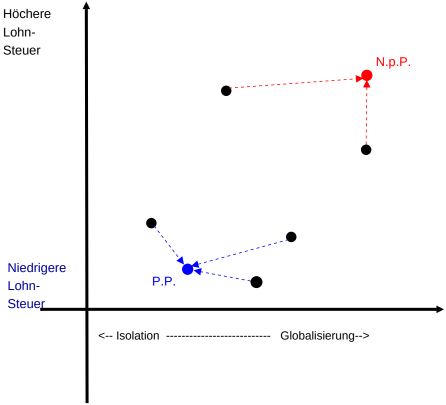


Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand. Danach entscheidet die einfache Mehrheit.

Wir betrachten ein geometrisches Modell eines hypothetischen Parlaments.



Abgeordnete = Punkte auf der Ebene

Aktuelles politisches Programm = Punkt auf der Ebene

Die Regierung schlägt ein neues politisches Programm vor.
Jeder Abgeordnete entscheidet ob er das neue bevorzugt, oder das alte behalten will, Entscheidungskriterium ist Abstand. Danach entscheidet die einfache Mehrheit.
(Wir werden voraussetzen, dass Anzahl von Abgeordneten $2k + 1$ ist.)

Bezeichnung:

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*

Frage:

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967):

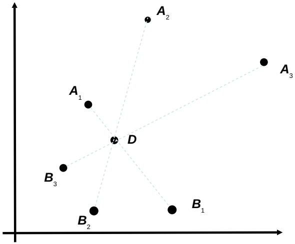
Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn*

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert,*

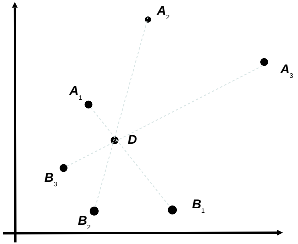
Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert, so dass man die anderen Abgeordneten in Paaren (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_k, B_k) verteilen kann,*

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert, so dass man die anderen Abgeordneten in Paaren (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_k, B_k) verteilen kann, so dass D auf jeder Strecke A_iB_i liegt.*

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert, so dass man die anderen Abgeordneten in Paaren (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_k, B_k) verteilen kann, so dass D auf jeder Strecke A_iB_i liegt.*

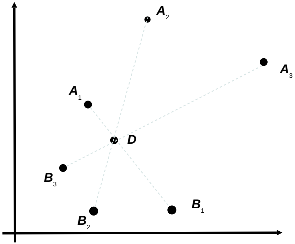


Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert, so dass man die anderen Abgeordneten in Paaren (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_k, B_k) verteilen kann, so dass D auf jeder Strecke A_iB_i liegt.*



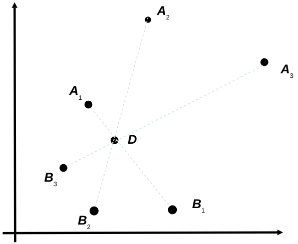
In dem Fall nimmt das Parlament die Entscheidung des Abgeordneten D an.

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert, so dass man die anderen Abgeordneten in Paaren (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_k, B_k) verteilen kann, so dass D auf jeder Strecke A_iB_i liegt.*



In dem Fall nimmt das Parlament die Entscheidung des Abgeordneten D an.
Insbesondere gilt: Das Programm D ist unschlagbar.

Bezeichnung: *Falls politisches Programm Y gegen politisches Programm X gewinnt, werden wir $X \prec Y$ schreiben.*
Frage: *Wann gibt es ein unschlagbares politisches Programm?*
Antwort (Plott 1967): *Es existiert genau dann ein unschlagbares politisches Programm, wenn ein Abgeordneter D existiert, so dass man die anderen Abgeordneten in Paaren (A_1, B_1), (A_2, B_2),...,(A_k, B_k) verteilen kann, so dass D auf jeder Strecke A_iB_i liegt.*



In dem Fall nimmt das Parlament die Entscheidung des Abgeordneten D an.
Insbesondere gilt: Das Programm D ist unschlagbar.

Beweis

Beweis

Definiton:

Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*

Beweis

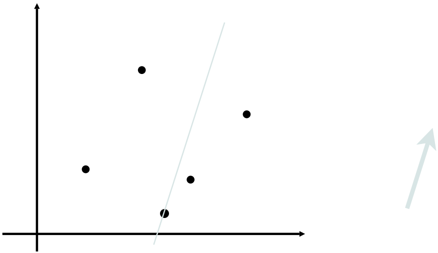
Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*

Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*

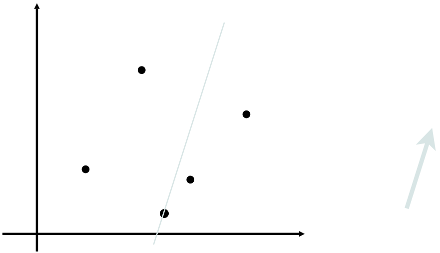
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade* *ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*



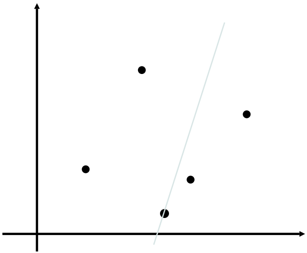
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade* *ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung.



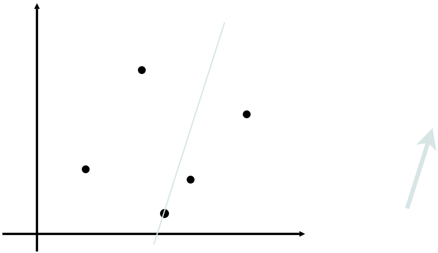
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade,



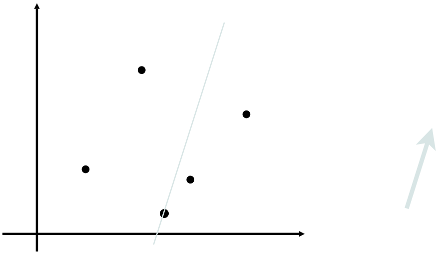
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist,



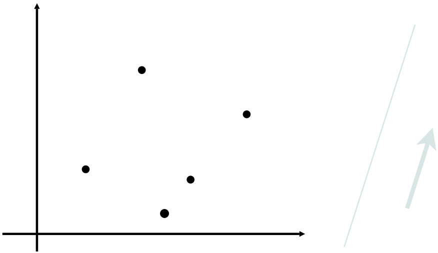
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen.



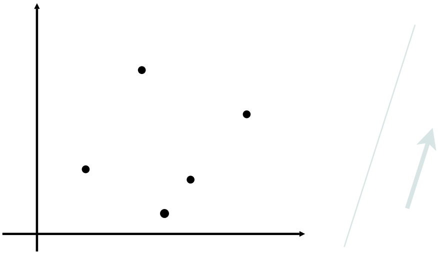
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen.



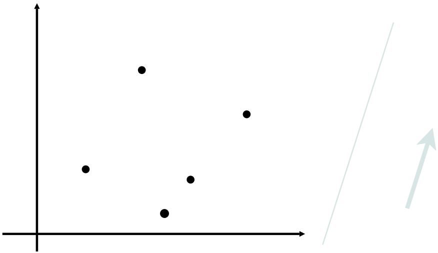
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.



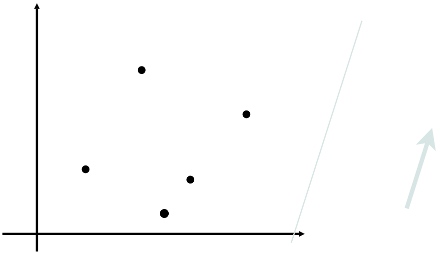
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.



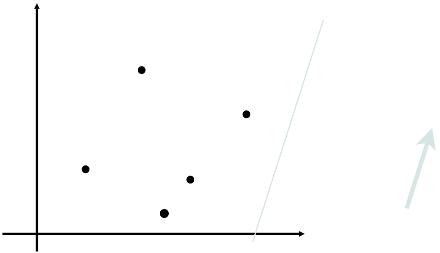
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.



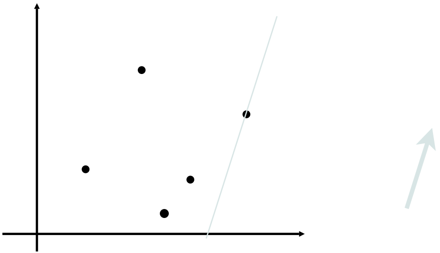
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.



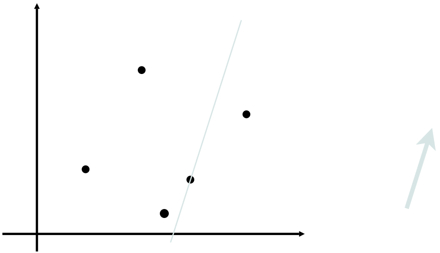
Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.



Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.

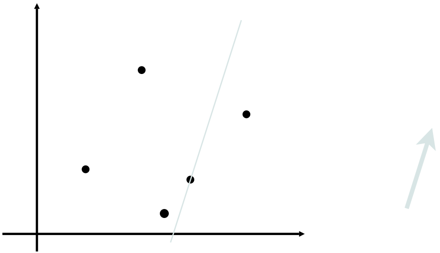


Beweis

Definiton: *Die Mediangerade* *ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*

Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*

Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen.

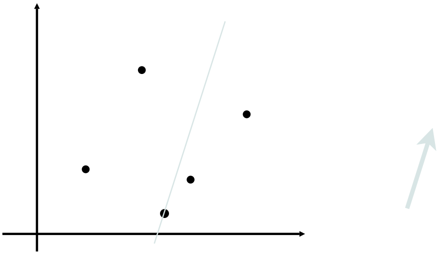


Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*

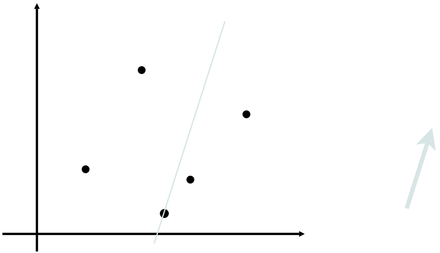
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*

Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen. Zu einem Zeitpunkt wird Anzahl der Abgeordneten in jeder Halbebene grösser sein als k.



Beweis

Definiton: *Die Mediangerade ist die Gerade mit der Eigenschaft, dass in jeder Halbebene mindestens die Hälfte von Abgeordneten liegt.*
Hilfsaussage 1: *Für jede Richtung es existiert eine Mediangerade, die parallel zu der Richtung ist.*
Erklärung. Wir nehmen eine Gerade, die parallel zu der Richtung ist, so dass in einer Halbebene keine Abgeordneten liegen. Dann werden wir die Gerade in Richtung der Abgeordneten langsam bewegen. Zu einem Zeitpunkt wird Anzahl der Abgeordneten in jeder Halbebene grösser sein als k. (Die Anzahl von Abgeordneten ist $2k + 1$).



Hilfsaussage 2:

Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

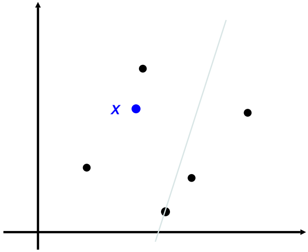
Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*
Beweis.

Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m.

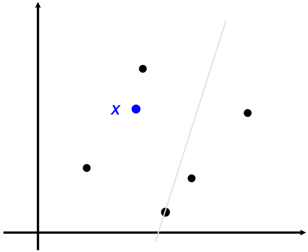
Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m.



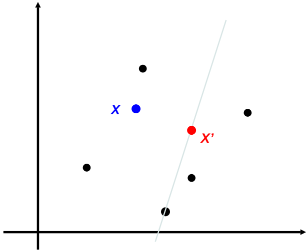
Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m.



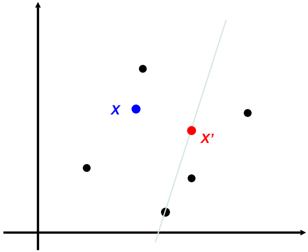
Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m.



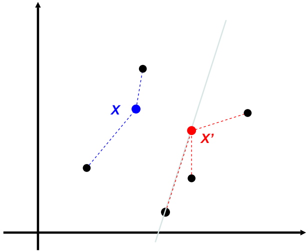
Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen.



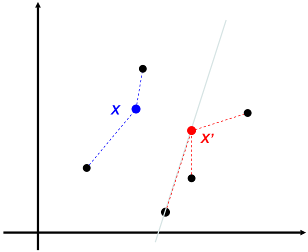
Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen.

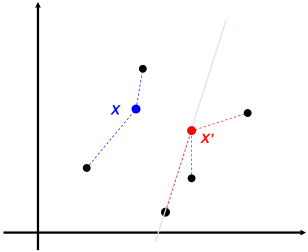


Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen.

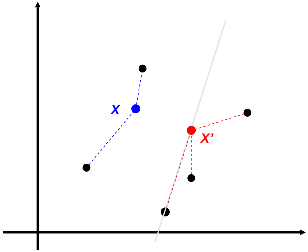


Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*
Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen. Also, $X \prec X'$.



Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

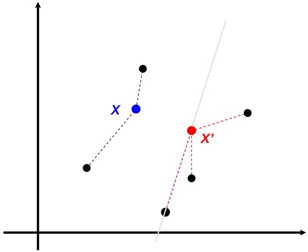
Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen. Also, $X \prec X'$.



Folgerung:

Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

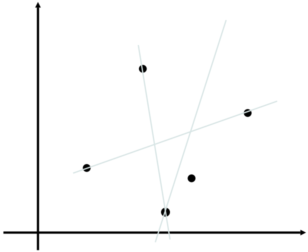
Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen. Also, $X \prec X'$.



Folgerung: Existiert ein unschlabares Programm D, so schneiden alle Mediangeraden einander im Punkt D.

Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

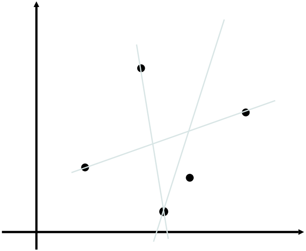
Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen. Also, $X \prec X'$.

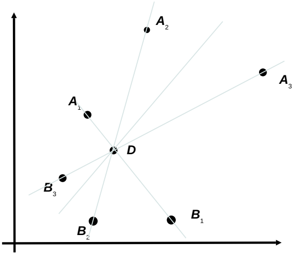


Folgerung: Existiert ein unschlabares Programm D, so schneiden alle Mediangeraden einander im Punkt D.

Hilfsaussage 2: *Das unschalgbares Programm, falls es existiert, liegt auf jeder Mediangeraden.*

Beweis. Ein Programm X liege nicht auf der Mediangeraden m. Man betrachte die orthogonale Projektion X' von X auf die Mediangerade m. Die Abgeordneten, die nicht in der Halbebene des Punktes X liegen, werden X' bevorzugen. Also, $X \prec X'$.





Folgerung: Existiert ein unschlabares Programm D, so schneiden alle Mediangeraden einander im Punkt D.

Frage:

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976):

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm.*

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt,*

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*
Mathematisch sauberer:

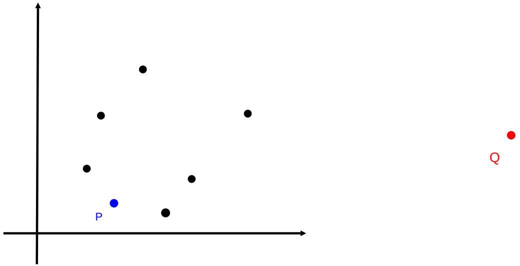
Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*
Mathematisch sauberer: Satz:

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*
Mathematisch sauberer: Satz: *Angenommen, es gibt kein unschlagbares Programm,*

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*
Mathematisch sauberer: Satz: *Angenommen, es gibt kein unschlagbares Programm, dann gibt es für alle Programme* P, Q *eine endliche Folge* $P_0 = P, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n = Q$*,*

Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*
Mathematisch sauberer: Satz: *Angenommen, es gibt kein unschlagbares Programm, dann gibt es für alle Programme* P, Q *eine endliche Folge* $P_0 = P, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n = Q$, *so dass* $P_i \prec P_{i+1}$.

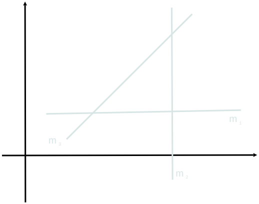
Frage: *Ist es schlimm, falls es kein unschlagbares Programm gibt?*
Antwort (McKelvey 1976): *Sehr schlimm. Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*
Mathematisch sauberer: Satz: *Angenommen, es gibt kein unschlagbares Programm, dann gibt es für alle Programme P, Q eine endliche Folge $P_0 = P, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n = Q$, so dass $P_i \prec P_{i+1}$.*



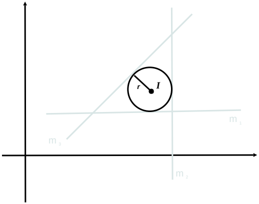
Beweis.

Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden.

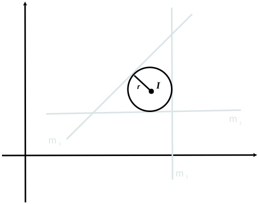
Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden.



Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)

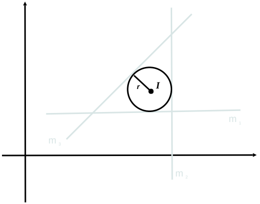


Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



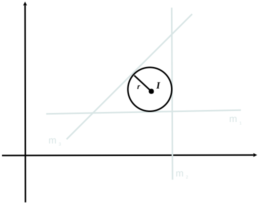
Hilfsaussage 3:

Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



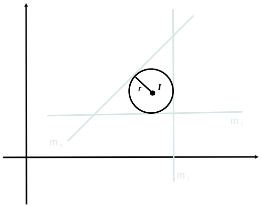
Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm* X

Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



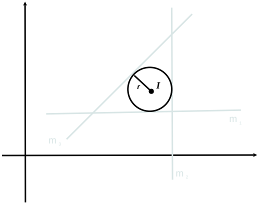
Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm X gibt es ein politisches Programm Y,*

Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm X gibt es ein politisches Programm Y, so dass $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ und so dass $X \prec Y$*

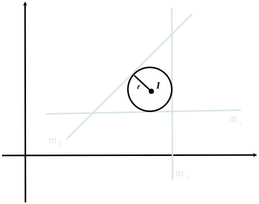
Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm* X *gibt es ein politisches Programm* Y, *so dass* $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ *und so dass* $X \prec Y$

Bemerkung:

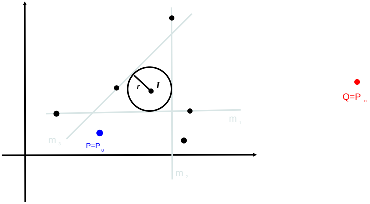
Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm X gibt es ein politisches Programm Y, so dass $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ und so dass $X \prec Y$*

Bemerkung: *Der Satz von McKelvey folgt sofort aus der Hilfsaussage.*

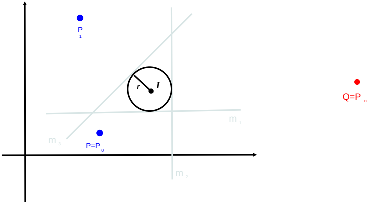
Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm X gibt es ein politisches Programm Y, so dass $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ und so dass $X \prec Y$*

Bemerkung: *Der Satz von McKelvey folgt sofort aus der Hilfsaussage.*

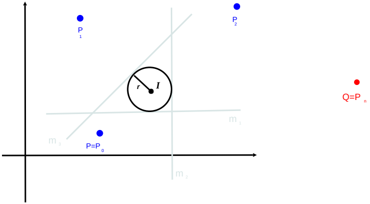
Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm X gibt es ein politisches Programm Y, so dass $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ und so dass $X \prec Y$*

Bemerkung: *Der Satz von McKelvey folgt sofort aus der Hilfsaussage.*

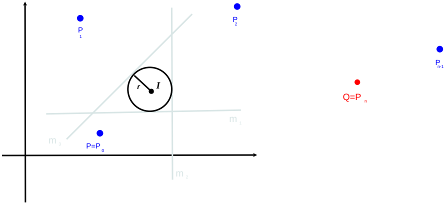
Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)



Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm X gibt es ein politisches Programm Y, so dass $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ und so dass $X \prec Y$*

Bemerkung: *Der Satz von McKelvey folgt sofort aus der Hilfsaussage.*

Beweis. Angenommen, es gibt kein unschlagbares politisches Programm, dann gibt es drei Mediangeraden, die ein Dreieck bilden. (I ist der Mittelpunkt, r der Radius des einbeschriebenen Kreises.)

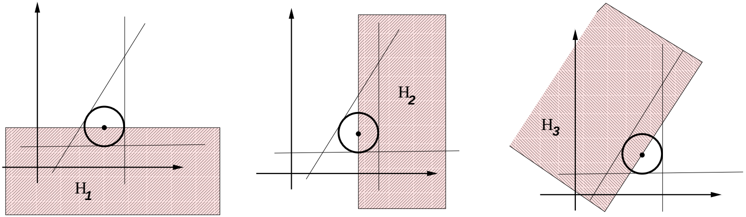


Hilfsaussage 3: *Für jedes politische Programm* X *gibt es ein politisches Programm* Y, *so dass* $|IY|^2 > |IX|^2 + r^2$ *und so dass* $X \prec Y$

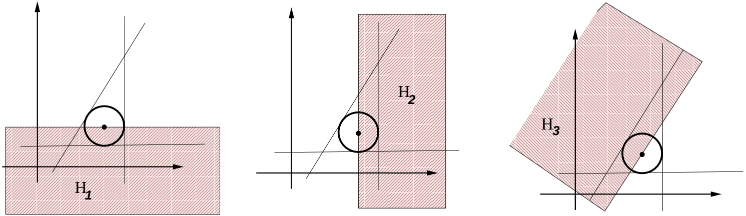
Bemerkung: *Der Satz von McKelvey folgt sofort aus der Hilfsaussage.*

Beweis der Hilfsaussage. Man betrachte die drei Halbebenen, wie auf dem Bild.

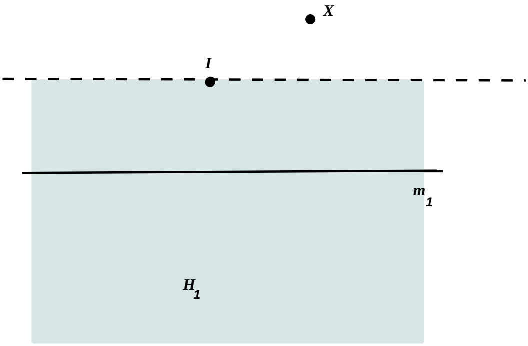
Beweis der Hilfsaussage. Man betrachte die drei Halbebenen, wie auf dem Bild.



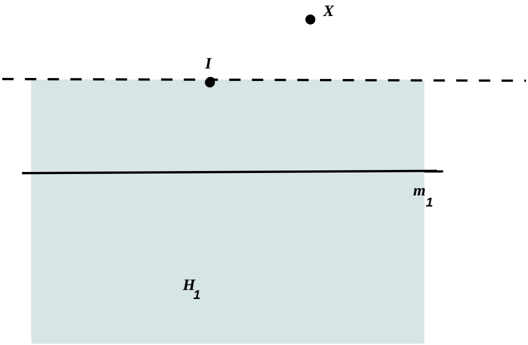
Beweis der Hilfsaussage. Man betrachte die drei Halbebenen, wie auf dem Bild.



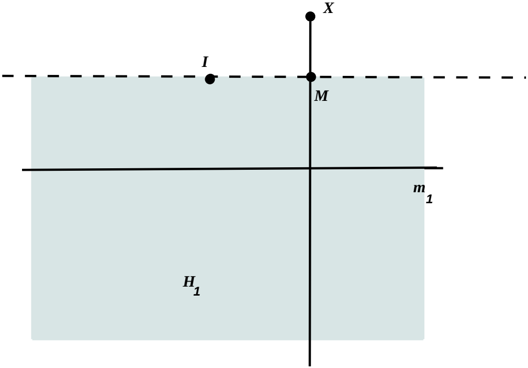
Sie haben nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich I. Deswegen liegt der Punkt X nicht in einer der Halbebenen, z.B. nicht in der Halbebene H_1.



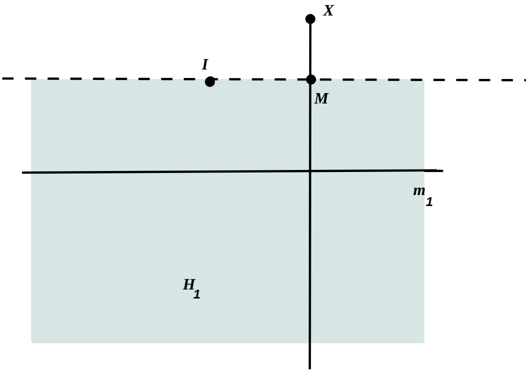
X
I
m
1
H
1



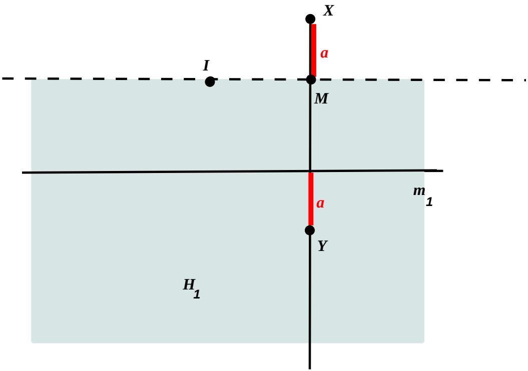
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist



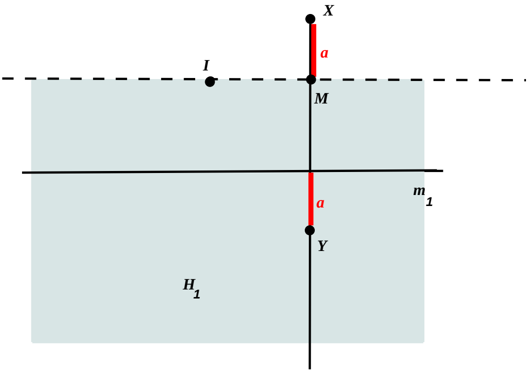
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist



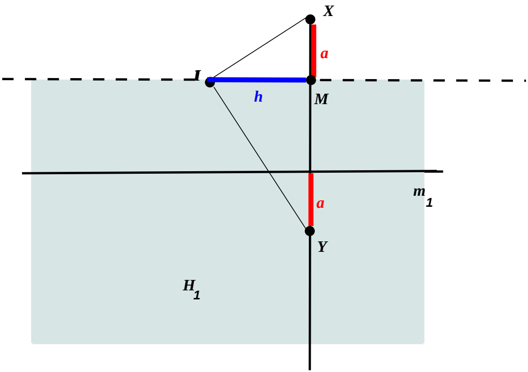
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild.



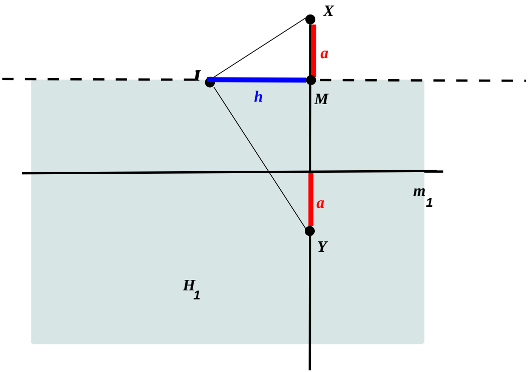
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild.



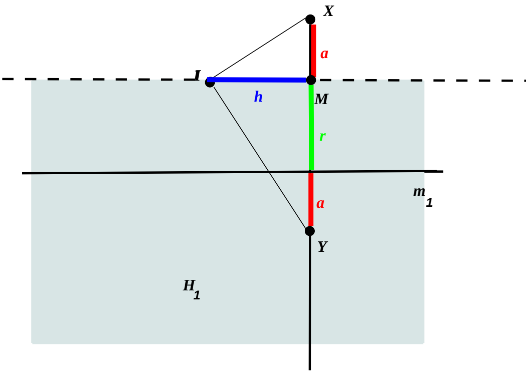
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h.



Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h.

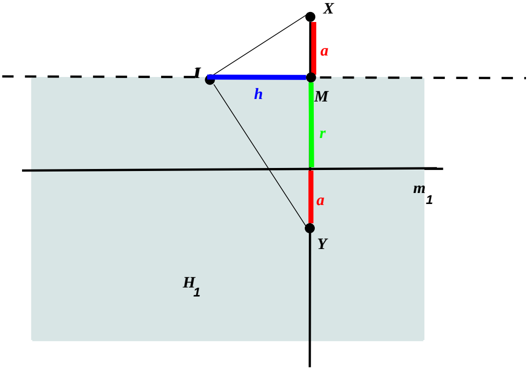


Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.



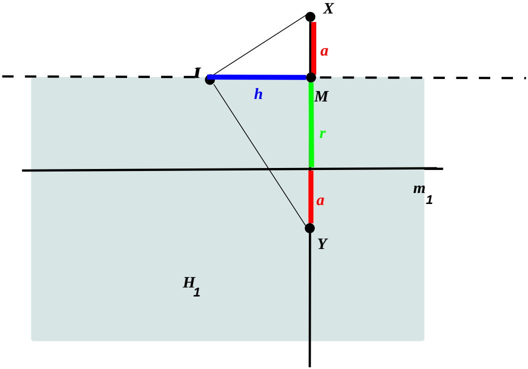
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt

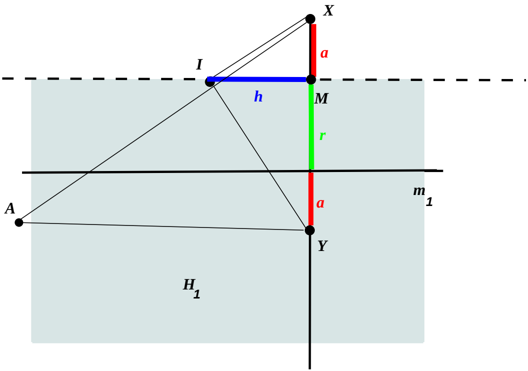


Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.



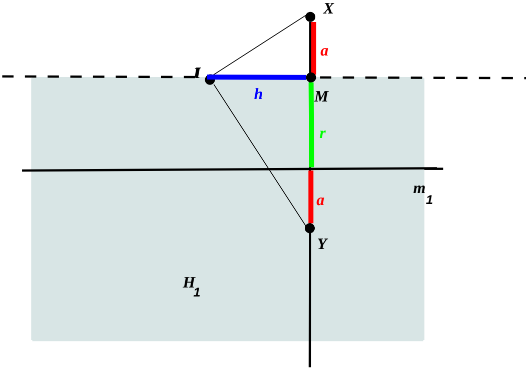
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.
Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.
Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$.



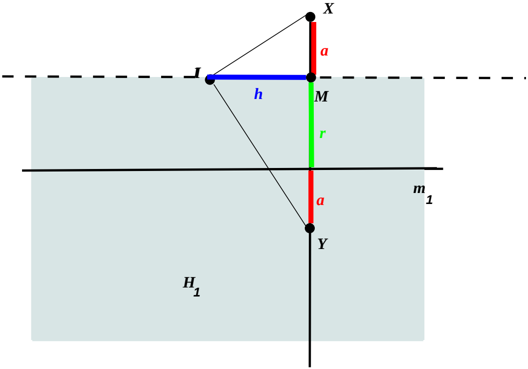
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$.



Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.
Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.
Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

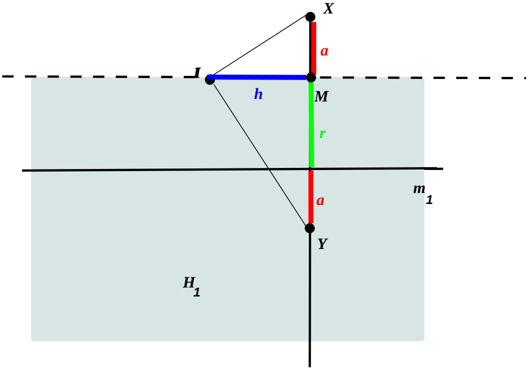


Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

Nach Satz des Pythagoras gilt:

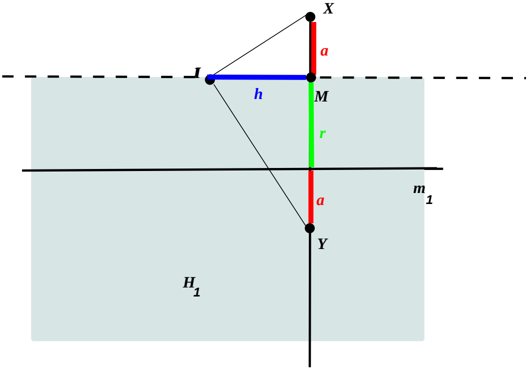


Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

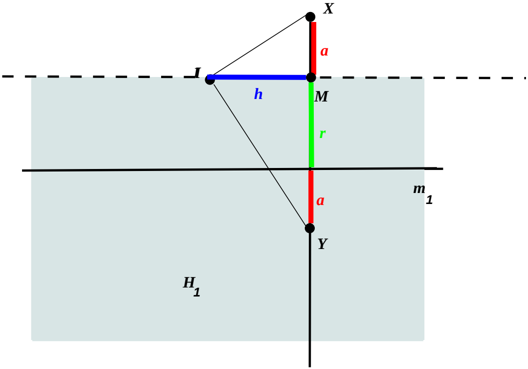
Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

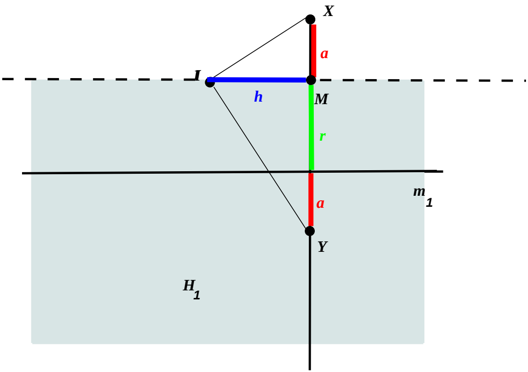
Nach Satz des Pythagoras gilt: $\Big\{$



Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.
Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.
Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.
Nach Satz des Pythagoras gilt: $\left\{ \begin{array}{lcl} |IX|^2 & = & h^2 + a^2 \end{array} \right.$



Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.
Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.
Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.
Nach Satz des Pythagoras gilt: $\begin{cases} |IX|^2 = h^2 + a^2 \\ |IY|^2 = h^2 + (r + a)^2 \end{cases}$

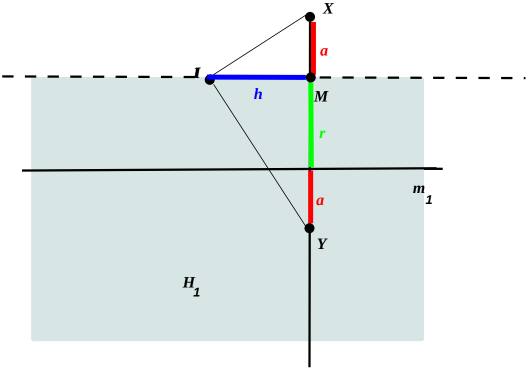


Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

Nach Satz des Pythagoras gilt: $\begin{cases} |IX|^2 = h^2 + a^2 \\ |IY|^2 = h^2 + (r+a)^2 \end{cases}$ Dann ist $|IY|^2 - |IX|^2$



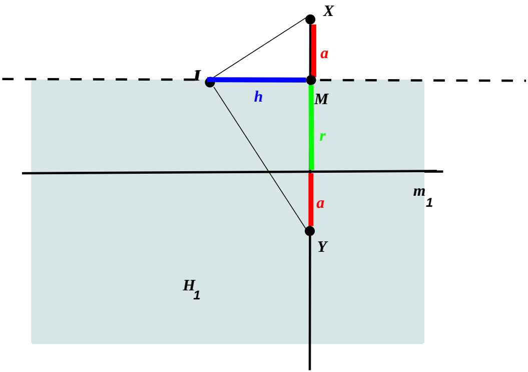
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

Nach Satz des Pythagoras gilt: $\begin{cases} |IX|^2 & = & h^2 + a^2 \\ |IY|^2 & = & h^2 + (r+a)^2 \end{cases}$ Dann ist $|IY|^2 - |IX|^2$

$= h^2 + (r+a)^2 - (h^2 + a^2)$



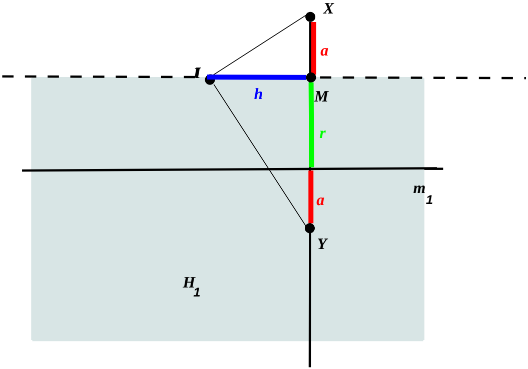
Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

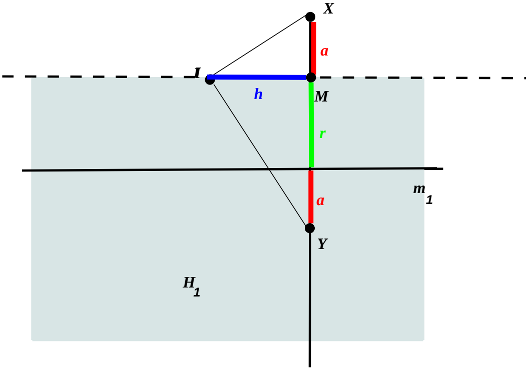
Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

Nach Satz des Pythagoras gilt: $\begin{cases} |IX|^2 & = & h^2 + a^2 \\ |IY|^2 & = & h^2 + (r+a)^2 \end{cases}$ Dann ist $|IY|^2 - |IX|^2$

$= h^2 + (r+a)^2 - (h^2 + a^2)$



Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.
Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.
Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.
Nach Satz des Pythagoras gilt: $\left\{ \begin{array}{ccc} |IX|^2 & = & h^2 + a^2 \\ |IY|^2 & = & h^2 + (r+a)^2 \end{array} \right.$ Dann ist $|IY|^2 - |IX|^2$
$= h^2 + (r+a)^2 - (h^2 + a^2) = r^2 + 2ar$

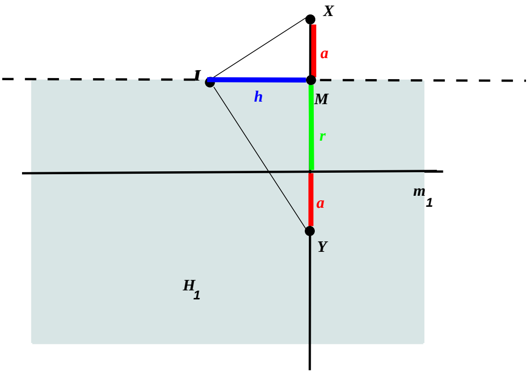


Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

Nach Satz des Pythagoras gilt: $\begin{cases} |IX|^2 & = & h^2 + a^2 \\ |IY|^2 & = & h^2 + (r+a)^2 \end{cases}$ Dann ist $|IY|^2 - |IX|^2$ $= h^2 + (r+a)^2 - (h^2 + a^2) = r^2 + 2ar \geq r^2$.



Man betrachte die Gerade, die orthogonal zu m_1 ist und den Punkt Y, wie auf dem Bild. Die Höhe des Dreiecks XIY nennen wir h. Die Länge von MY ist $r + a$.

Wir müssen zeigen, dass $X \prec Y$ gilt und dass $|IY|^2 - |IX|^2 \geq r^2$ ist.

Zuerst, $X \prec Y$. Jeder Abgeordnete A, der unter der Mediangeraden m_1 liegt, wird Y bevorzugen, weil $|AX| > |AY|$. Also, $X \prec Y$.

Nach Satz des Pythagoras gilt: $\begin{cases} |IX|^2 & = & h^2 + a^2 \\ |IY|^2 & = & h^2 + (r+a)^2 \end{cases}$ Dann ist $|IY|^2 - |IX|^2$ $= h^2 + (r+a)^2 - (h^2 + a^2) = r^2 + 2ar \geq r^2$.

Beide Antworten zusammen

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator“.*

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator".*
- **McKelvey 1976** *Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator".*
- **McKelvey 1976** *Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Literatur:

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator".*
- **McKelvey 1976** *Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Literatur:

- Plott C.R. *A notion of the equilibrium and its possibility under majority rule*, Amer. Econ. Rev., 1967, v. LVIII, n. 4, pp. 787–806.

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator“.*
- **McKelvey 1976** *Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Literatur:

- Plott C.R. *A notion of the equilibrium and its possibility under majority rule*, Amer. Econ. Rev., 1967, v. LVIII, n. 4, pp. 787–806.
- McKelvey R.D. *Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control,* J. Econ. Theory, 1976, v. 12, n.3, pp. 474–482

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator“.*
- **McKelvey 1976** *Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Literatur:

- Plott C.R. *A notion of the equilibrium and its possibility under majority rule*, Amer. Econ. Rev., 1967, v. LVIII, n. 4, pp. 787–806.
- McKelvey R.D. *Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control,* J. Econ. Theory, 1976, v. 12, n.3, pp. 474–482
- Slinko A. *Democracy from the viewpoint of Mathematics,* James Cook Math. Notes, v.6, n. 55, 1991.

Beide Antworten zusammen

- **Plott 1967** *Falls es ein unschlagbares Programm gibt, gibt es ein „Diktator“.*
- **McKelvey 1976** *Falls es kein unschlagbares Programm gibt, dann kann die Regierung jedes Programm in endlich vielen Schritten annehmen lassen.*

Literatur:

- Plott C.R. *A notion of the equilibrium and its possibility under majority rule*, Amer. Econ. Rev., 1967, v. LVIII, n. 4, pp. 787–806.
- McKelvey R.D. *Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control,* J. Econ. Theory, 1976, v. 12, n.3, pp. 474–482
- Slinko A. *Democracy from the viewpoint of Mathematics,* James Cook Math. Notes, v.6, n. 55, 1991.
- www.minet.uni-jena.de/∼matveev/Lehre/Schulertag/