

# Differentialrechnung in Banachräumen und Bifurkationstheorie

Prof. Dr. habil. Th. Runst

Mathematisches Institut, Friedrich–Schiller–Universität Jena

# 1 Einführung

Ein interessantes Phänomen in der Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen besteht darin, dass bestimmte Probleme mehr als eine Lösung besitzen können. Betrachten wir zum Beispiel das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(u(x)) + g(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

so können nach einem Resultat vom *Ambrosetti–Prodi-Typ* in Abhängigkeit von der Nichtlinearität, die durch die Funktion  $f(\cdot)$  erzeugt wird, und der rechten Seite  $g$  **keine, genau eine** oder auch **zwei** Lösungen existieren. Man beachte, dass in der linearen Theorie nur die Fälle möglich sind, wo keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen auftreten! In der Regel werden in der nichtlinearen Theorie Ergebnisse bezüglich der *Mindestanzahl* von Lösungen erzielt. Dabei gibt es Aussagen, die lokalen oder globalen Charakter haben. Diese sind sowohl aus mathematischer Sicht als auch für vielfältige Anwendungen interessant, um die Lösungsstruktur, z.B. bei höheren Energieniveaus von Atomen, schwingenden Saiten, ..., zu verstehen. In den letzten Jahren wurden große Fortschritte erreicht, um die Existenz von mehreren Lösungen für bestimmte Klassen von nichtlinearen Differentialgleichungen mittels abstrakter mathematischer Methoden beweisen zu können. Diese Theorien beruhen in der Regel auf der Verallgemeinerung von speziellen Resultaten aus der klassischen Analysis. Einige dieser Verfahren sind die

- Bifurkations- oder Verzweigungstheorie (Satz von Picard–Lindelöf, Banachscher Fixpunktsatz, Sätze über implizite Funktionen),
- Theorie des topologischen Abbildungsgrades (Argumentprinzip in der komplexen Funktionentheorie zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, Umschlingungszahl, Satz von Piano, Schauderscher Fixpunktsatz, kompakte Operatoren),
- Variationsmethoden (Extremwerte von Funktionen, kritische Punkte von Funktionalen)
- Ljusternik–Schnirelman-Theorie (konvexe Funktionen und Funktionale, Minimax–Charakterisierung von Eigenwerten von quadratischen Formen)

und die

- Morse-Theorie (nichtinvertierbare Abbildungen, Singularitätentheorie).

In dieser Vorlesung konzentrieren wir uns in erster Linie auf Ergebnisse, die im Rahmen der *Bifurkationstheorie* erzielt werden.

Im ersten Teil beschäftigen wir uns mit der Differentialrechnung in Banachräumen, die eine Verallgemeinerung der bekannten Differentialrechnung aus dem  $\mathbb{R}^n$  darstellt. Schwerpunkte bilden dabei für unsere späteren Untersuchungen *lokale* und *globale Inversionssätze*. Anschließend führen wir, aufbauend auf diesen Ergebnissen, auf elementare Weise die *Bifurkationstheorie* ein, die eine der schlagkräftigsten Methoden in der modernen nichtlinearen Analysis darstellt. Die dabei erzielten Ergebnisse verwenden wir dann zur Untersuchung der Lösungsstruktur von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen der Form

$$-\Delta u(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1)$$

in geeignet gewählten Banachräumen.

### Literatur

- M.S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press 1977
- K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer 1983
- S. Fučík, A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier 1980
- T. Runst, W. Sickel, *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, de Gruyter 1996
- E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*, Springer 1986

### Inhalt der Vorlesung

1. Einführung
2. Bezeichnungen
3. Differentialrechnung in Banachräumen
4. Lokale Inversionssätze
5. Globale Inversionssätze
6. Bifurkationssätze und Anwendungen auf nichtlineare Differentialgleichungen

## 2 Bezeichnungen und wichtige Resultate

In diesem Abschnitt führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein. Außerdem geben wir Resultate aus der Funktionalanalysis (z.B. Spektraltheorie kompakter Operatoren) und der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen (z.B. Fredholm–Alternative) an, die wir für unsere weiteren Untersuchungen im Rahmen der nichtlinearen Analysis benötigen werden.

### 2.1 Bezeichnungen

Unter einem (reellen) *linearem Vektorraum*  $V = [V, +, \cdot]$  verstehen wir wie üblich eine nichtleere Menge  $V$ , in der zwei Operationen erklärt sind:

- eine Addition „+“ beliebiger Elemente aus  $V$ :  $x, y \in V \mapsto x + y \in V$ ,
- eine (skalare) Multiplikation „ $\cdot$ “ von Elementen aus  $V$  mit reellen Zahlen:  
 $x \in V, \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda x \in V$ .

Dabei muss die Addition folgende Eigenschaften erfüllen:

- (Kommutativität):  $x + y = y + x$  für alle  $x, y \in V$ ,
- (Existenz eines eindeutig bestimmten neutralen Elementes  $0 \in V$ ):  $x + 0 = x$  für alle  $x \in V$ ,
- (Existenz eines eindeutig bestimmten inversen Elementes  $-x \in V$ ):  $x + (-x) = 0$  für alle  $x \in V$ ,
- (Assoziativität):  $x + (y + z) = (x + y) + z$  für alle  $x, y$  und  $z \in V$ .

Außerdem muss die Multiplikation folgende Eigenschaften erfüllen:

- $1x = x$  für alle  $x \in V$ ,
- (Assoziativität):  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$  für alle  $x \in V$  und alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- (Distributivitätsgesetze) Für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und alle  $x, y \in V$  gilt

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Wir führen jetzt den (reellen) Banachraum  $X$  ein.

**Definition 1** Es sei  $X$  ein (reeller) Vektorraum.

(i) Eine Abbildung  $\| \cdot \|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm, falls

(a)  $\|x\|_X \geq 0$  für alle  $x \in X$ , wobei  $\|x\|_X = 0$  genau dann gilt, wenn  $x = 0$  ist,

(b)  $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in X$ ,

(c) (Dreiecksungleichung)  $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$  für alle  $x, y \in X$ .

Ein Paar  $X = (X, \| \cdot \|_X)$ , bestehend aus einem (reellen) Vektorraum und einer Norm, heißt normierter (reeller) Vektorraum oder einfach normierter Raum.

(ii) Ein (reeller) Banachraum  $X$  ist ein normierter Raum, der bezüglich der Norm vollständig ist, d.h., jede Fundamentalfolge (Cauchy-Folge)

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$$

ist eine konvergente Folge in  $X$ . Es existiert also ein eindeutig bestimmtes Element  $x \in X$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Da wir hier nur reelle Banachräume betrachten, verwenden wir einfach den Begriff Banachraum.

Wir sagen  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  konvergiert (streng) gegen  $x \in X$  (Schreibweise:  $x_n \rightarrow x$ ), falls

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

gilt.

Es sei  $X$  ein Banachraum mit Norm

$$\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Falls  $r > 0$  gilt, so bezeichnet wir mit

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_X < r\}$$

eine offene Kugel vom Radius  $r$  um  $x \in X$ . Wir setzen insbesondere im Falle  $x = 0$

$$B(r) = B(0, r).$$

$\bar{B}(x, r)$  bzw.  $\bar{B}(r)$  kennzeichnet dann die entsprechende abgeschlossene Kugel.

Im folgenden bezeichnen wir wie üblich mit  $\mathcal{L}(X, Y)$  die Menge der linearen und stetigen Abbildungen  $A : X \rightarrow Y$ , die bezüglich der Norm

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y),$$

ein Banachraum ist.

Es gilt also für alle  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

- (die Linearität):  $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und alle  $x, y \in X$  sowie
- (die Stetigkeit): aus  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  folgt  $Ax_n \rightarrow Ax$  in  $Y$ .

Falls  $X = Y$ , so schreiben wir einfach  $\mathcal{L}(X)$ . Weiterhin bezeichnet  $R(A)$  das Bild von  $A$  und  $\ker(A)$  den Kern von  $A$ , d.h.

$$R(A) = \{y = Ax \in Y : x \in X\}, \quad \ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}.$$

Mit

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

bezeichnen wir den zu  $X$  dualen Raum, d.h. den Banachraum der auf  $X$  definierten stetigen linearen Funktionale

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Alle linearen stetigen Funktionale bilden mit

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)|$$

einen reellen Banachraum. Man verwendet auch folgende symbolische Schreibweise

$$\langle f, x \rangle := f(x), \quad f \in X^*, \quad x \in X.$$

Durch

$$\langle f, x \rangle, \quad f \in X^*, \quad x \in X$$

sei dabei das *duale Paar* gegeben.

Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in X^*$  und  $x, y \in X$  gilt dann

$$\langle \alpha f + \beta g, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle g, x \rangle,$$

$$\langle f, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle f, y \rangle,$$

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|_X,$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} \langle f, x \rangle,$$

$$\|x\|_X = \sup_{\|f\|=1} \langle f, x \rangle$$

Wir führen einen weiteren Konvergenzbegriff ein.

Die Folge  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  konvergiert *schwach* gegen  $x \in X$  (Schreibweise:  $x_n \rightharpoonup x$ ), falls

$$\langle x^*, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

für alle  $x^* \in X^*$ .

Im folgenden seien  $X, Y$  Banachräume und  $U \subset X$  eine offene Teilmenge von  $X$ , d.h., für jedes  $u \in U$  existiert eine Kugel  $B(u, \varepsilon) \subset U$ , falls  $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$  hinreichend klein gewählt wird.

Die Abbildung  $f : U \rightarrow Y$  ist stetig in  $x \in U$ , falls  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  (streng) für jede gegen  $x$  (streng) konvergente Folge  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ , d.h.  $x_n \rightarrow x$ .  $f$  heißt stetig auf  $U$ , falls  $f$  für jedes  $x \in U$  stetig ist. Mit  $C(U, Y)$  bezeichnen wir dann die Menge aller stetigen Abbildungen  $f : U \rightarrow Y$ .

## 2.2 Integration und Differentiation von Vektorfunktionen

### 2.2.1 Integration von Vektorfunktionen

Falls  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung in den Banachraum  $Y$  ist, so kann man in Analogie zum bestimmten Riemannsches Integral auf  $\mathbb{R}$  *das Cauchy-Integral* für Vektorfunktionen einer reellen Variable

$$\int_a^b f(t) dt$$

als (strengen) Limes der endlichen Zwischensumme

$$S_Z = \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$

einführen, wobei

$$Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$$

eine zulässige Zerlegung von  $[a, b]$  und

$$d(Z) = \max_i (t_i - t_{i-1})$$

deren Feinheit bezeichnet sowie

$$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

gilt. Dann definiert man

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{Z_k},$$

falls dieser Grenzwert für alle zulässigen Zerlegungsfolgen

$$Z_k : a = t_0^k < t_1^k < \dots < t_{N_k-1}^k < t_{N_k}^k = b \quad \text{mit } d(Z_k) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

existiert.

In Analogie zum klassischen Beweis im Falle des Riemannsches Integrals hat man folgendes Ergebnis.

**Satz 1 (Existenzsatz)** Falls  $f$  auf  $[a, b]$  stetig ist, so existiert das Integral

$$\int_a^b f(t) dt \in Y.$$

Weiterhin gelten folgende Eigenschaften.

**Satz 2** Es sei  $Y$  ein Banachraum und  $\lambda, \mu$  seien reelle Zahlen. Die Funktionen  $f, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow Y$  seien auf  $[a, b]$  stetig.

Es gilt

- (i)  $\| \int_a^b f(t) dt | Y \| \leq \int_a^b \| f(t) | Y \| dt,$
- (ii)  $\int_a^b (\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)) dt = \lambda \int_a^b f_1(t) dt + \mu \int_a^b f_2(t) dt,$
- (iii)  $\langle g, \int_a^b f(t) dt \rangle = \int_a^b \langle g, f(t) \rangle dt$  für alle  $g \in Y^*$

**Beweis:** Wir zeigen (i). Aus der Dreiecksungleichung der Norm  $\| \cdot | Y \|$  folgt wegen

$$\| \sum_{i=0}^N f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) | Y \| \leq \sum_{i=0}^N \| f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) | Y \| \leq \sum_{i=0}^N \| f(\xi_i) | Y \| (t_{i+1} - t_i)$$

durch Limesbetrachtung

$$\| \int_a^b f(t) dt | Y \| \leq \int_a^b \| f(t) | Y \| dt.$$

Die anderen Aussagen ergeben sich analog durch Grenzübergang in den Relationen zwischen den entsprechenden Zwischensummen. ■

### 2.2.2 Differentiation von Vektorfunktionen

Falls  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung in den Banachraum  $Y$  ist, so kann man in Analogie zur Differentiation in  $\mathbb{R}$  auch die Differentiation von Vektorfunktionen, die von einem reellen Parameter abhängen, einführen. Die Ergebnisse lassen sich unter Verwendung der trickreichen Abbildung

$$t \rightarrow d(t) = \langle g, f(t) \rangle, \quad g \in Y^*, f(t) \in Y,$$

auf den klassischen Fall zurückführen.

**Definition 2** Es sei  $Y$  ein Banachraum,  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $f$  heißt differenzierbar in  $t_0 \in (a, b)$ , falls der endliche Grenzwert

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

in  $Y$  existiert.

In Analogie zu Differentiation von reellen Funktionen kann man auch hier sukzessiv *höhere Ableitungen* sowie *links- und rechtsseitige Ableitungen* einführen.

Es gelten die folgenden Eigenschaften.

**Satz 3** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow Y$  stetig,  $f'$  existiert auf  $(a, b)$  sowie die rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung  $f'(a + 0)$  und  $f'(b - 0)$ . Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq (b - a) \sup_{t \in (a, b)} \|f'(t)\|_Y \quad (1)$$

und

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt. \quad (2)$$

**Beweis:** 1. Schritt Wir zeigen (1) und definieren

$$d(t) = \langle g, f(t) \rangle, \quad g \in Y^*.$$

Damit gilt  $d'(t) = \langle g, f'(t) \rangle$ . Definieren wir jetzt

$$M = \{g : \|g\|_{Y^*} = 1\},$$

so folgt mit klassischem Mittelwertsatz bzgl.  $d(\cdot)$  und den Ergebnissen auf Seite 5

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|_Y &= \sup_M \langle g, f(b) - f(a) \rangle = \sup_M (d(b) - d(a)) \\ &= (b - a) \sup_M d'(t_0) = (b - a) \|f'(t_0)\|_Y, \quad t_0 \in (a, b). \end{aligned}$$

2. Schritt Es gilt zunächst

$$d(b) - d(a) = \int_a^b d'(t) dt = \int_a^b \langle g, f'(t) \rangle dt.$$

Damit ergibt sich nach der obigen Definition unter Verwendung von Satz 2(iii) in Abschnitt 2.2.1

$$\langle g, f(b) - f(a) - \int_a^b f'(t) dt \rangle = 0$$

die Aussage. ■

Indem man den klassischen Satz von Taylor auf die Funktion  $d(t) = \langle g, f(t) \rangle$ ,  $t \in (a, b)$ ,  $g \in Y^*$  anwendet und beachtet, dass

$$d^{(i)}(t) = \langle g, f^{(i)}(t) \rangle$$

gilt, so erhält man jetzt folgende Verallgemeinerung.

**Satz 4 (Verallgemeinerter Satz von Taylor)** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow Y$  sei  $n$ -mal differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann ist für alle  $t, t_0 \in (a, b)$*

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i + R_n, \quad (3)$$

wobei für das Restglied  $R_n$  die Abschätzung

$$\|R_n|Y\| \leq \sup_{0 < \tau < 1} \|f^{(n)}(t_0 + \tau(t - t_0))|Y\| \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad (4)$$

gilt.

Ebenfalls kann man das folgende Ergebnis herleiten.

**Satz 5 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)**

*Es gelte  $-\infty < a < b < \infty$ . Die Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow Y$  sei stetig, wobei  $Y$  ein Banachraum ist. Die Funktion  $F$  sei durch*

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds, \quad s \in (a, b),$$

definiert. Dann ist  $F$  auf  $(a, b)$  differenzierbar, und es gilt

$$F'(t) = f(t), \quad t \in (a, b).$$

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $h > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \right\|_{|Y} &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f(s) - f(t)) ds \right\|_{|Y} \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \|f(s) - f(t)\|_{|Y} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \downarrow 0. \end{aligned}$$

■

### 2.3 Funktionenräume

Als nächstes führen wir einige Funktionenräume ein, die für die späteren Anwendungen von Bedeutung sein werden. Wie üblich bezeichnet dabei  $\Omega$  ein beschränktes glattes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial\Omega$ .

Es sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $C^k(\overline{\Omega})$  die Menge aller reellen Funktionen  $u$  mit der Eigenschaft, dass  $u$  und alle klassischen Ableitungen  $D^\beta u$  für  $|\beta| \leq k$  auf  $\Omega$  definiert und stetig auf  $\overline{\Omega}$  fortgesetzt werden können. Dann ist  $C^k(\overline{\Omega})$  ein Banachraum bezüglich der Norm

$$\|u|_{C^k}\| = \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta u(x)|.$$

Es sei jetzt  $\alpha \in (0, 1)$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann bezeichnet  $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$  den *Hölderraum*

$$C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : D^\beta u \text{ ist } \alpha\text{-Hölder-stetig für } |\beta| = k\},$$

d.h., für  $u \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$  muss folgende Norm endlich sein:

$$\|u|_{C^{k+\alpha}}\| = \|u|_{C^k}\| + \sum_{|\beta|=k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Dann ist  $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$  bezüglich der Norm  $\|\cdot|_{C^{k+\alpha}}\|$  ebenfalls ein Banachraum.

Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist der Banachraum der  $p$ -integrierbaren Funktionen  $L_p(\Omega)$  wie üblich durch

$$L_p(\Omega) = \{u \text{ ist Lebesgue-messbar auf } \Omega : \|u|_{L_p}\| < \infty\}$$

gegeben (Äquivalenzklassen). Die Norm  $\|\cdot|_{L_p}\|$  ist dabei für  $p < \infty$  definiert durch

$$\|u|_{L_p}\| = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

und für  $p = \infty$  durch

$$\|u|_{L_\infty}\| = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)|.$$

Für  $L_p(\Omega)$  gilt die *Höldersche Ungleichung*

$$\int_{\Omega} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \|f|_{L_p}\| \|g|_{L_q}\|, \quad (5)$$

falls  $1 \leq p \leq \infty$  und  $1/p + 1/q = 1$ . Dabei setzen wir  $1/\infty = 0$ .

Wir führen weiterhin für  $1 \leq p < \infty$  und  $k \in \mathbb{N}$  als Banachraum den *Sobolevraum*  $W_p^k(\Omega)$  durch

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \|u|_{W_p^k}\| < \infty\}$$

ein, wobei

$$\|u|_{W_p^k}\| = \left( \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u|_{L_p}\|^p \right)^{1/p}$$

ist.

In diesem Falle sind die Ableitungen  $D^\beta$  als Ableitungen im Sinne von *Distributionen* zu verstehen.

**Definition 3** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume.*

(i)  *$X$  ist stetig eingebettet in  $Y$ , falls  $X \subset Y$  gilt und die identische Abbildung  $id : X \rightarrow Y$  stetig ist. Es existiert also ein  $c > 0$ , so dass*

$$\|u|_Y\| \leq c \|u|_X\|$$

*für alle  $u \in X$  gilt. Wir schreiben dann  $X \hookrightarrow Y$ .*

(ii)  *$X$  heißt kompakt eingebettet in  $Y$ , falls die identische Abbildung  $i : X \rightarrow Y$  sogar kompakt ist, d.h., jede beschränkte Menge in  $X$  ist eine präkompakte Menge in  $Y$ . Wir schreiben dann  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ .*

Es gilt also:

(i) Aus  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$  folgt stets  $X \hookrightarrow Y$ .

(ii) Gilt  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ , so kann aus jeder beschränkten Folge  $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset X$  eine Teilfolge  $\{x_{j_k}\}_{k=1}^\infty \subset X$  ausgewählt werden, so dass  $\{x_{j_k}\}_{k=1}^\infty$  in  $Y$  konvergiert.

Wir geben einige Beispiele für stetige Einbettungen zwischen den hier definierten Räumen an, die wir später zum Teil auch verwenden werden.

**Satz 6** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes und glattes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Weiterhin gelte  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 1$  und  $1 \leq p < \infty$ .*

(a) *Dann gelten folgende stetige Einbettungen.*

(ai)  $L_\infty(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega) \hookrightarrow L_1(\Omega)$  für  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ .

(aii) Falls  $kp < n$ , dann ist  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$  für alle  $1 \leq q \leq np/(n - kp)$ .

(aiii) Falls  $kp = n$ , dann ist  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$  für alle  $1 \leq q < \infty$ .

(aiv) Falls  $kp > n$ , dann ist  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C^{0+\alpha}(\overline{\Omega})$  mit  $\alpha = k - n/p$ , falls  $k - n/p < 1$  und für alle  $0 < \alpha < 1$ , falls  $k - n/p = 1$  und  $p > 1$ .

(b) *Außerdem gelten folgende kompakte Einbettungen.*

(bi) Falls  $kp < n$ , dann ist  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega)$  für alle  $1 \leq q < np/(n - kp)$ .

(bii) Falls  $kp = n$ , dann ist  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega)$  für alle  $1 \leq q < \infty$ .

(biii) Falls  $kp > n$ , dann ist  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ .

(biv) Falls  $p > n$ , so ist  $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ .

## 2.4 Lineare partielle Differentialgleichungen

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  wie oben ein beschränktes und glattes Gebiet mit Rand  $\partial\Omega$  und  $h \in L_p(\Omega)$ . Wir betrachten zunächst das *lineare Randwertproblem*

$$-\Delta u = h \text{ fast überall in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (6)$$

im Banachraum  $W_p^2(\Omega)$ , wobei **stets**  $p > n$  gilt. Dabei bezeichnet  $\Delta$  den *Laplace-Operator* im  $\mathbb{R}^n$ , d.h., es gilt

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Außerdem folgt aus Satz 6 die kompakte Einbettung

$$W_p^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}),$$

d.h., die Lösung von (6) ist also stetig differenzierbar auf  $\Omega$ . Nun definieren wir mit

$$W_{p,0}^2(\Omega) = \{u \in W_p^2(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

einen Teilraum von  $W_p^2(\Omega)$  und mit

$$C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

einen Teilraum von  $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , die beide dem obigen Randwertproblem angepasst sind.

Es gilt das folgende klassische *Maximum-Prinzip* — siehe z.B. M.H. Protter und H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1967.

**Satz 7** Die Funktion  $v \in W_{p,0}^2(\Omega)$  erfülle die Bedingung

$$-\Delta v \geq 0 \text{ fast überall in } \Omega.$$

Dann gilt  $v(x) \geq 0$  für alle  $x \in \Omega$ . Falls  $v \not\equiv 0$  in  $\overline{\Omega}$ , so besitzt  $v$  die folgenden Eigenschaften

- (i)  $v = 0$  auf  $\partial\Omega$ ,
- (ii)  $v(x) > 0$  für alle  $x \in \Omega$  und
- (iii)  $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$  auf  $\partial\Omega$ , wobei  $\nu$  die äußere Normale bezüglich des Randes  $\partial\Omega$  ist.

Wir bemerken noch einmal, dass wegen der Bedingung  $p > n$  die Funktion  $v$  zum Banachraum  $C^1(\overline{\Omega})$  gehört.

Weiterhin hat (6) für jedes beliebige  $h \in L_p(\Omega)$  ( $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ ) eine eindeutige Lösung  $u \in W_{p,0}^2(\Omega)$  ( $u \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ), und es gilt folgendes Resultat.

**Satz 8** (i) *Die Abbildung*

$$-\Delta : W_{p,0}^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

*ist ein algebraischer und topologischer Isomorphismus für alle  $p$  mit  $1 < p < \infty$ .*

(ii) *Die Abbildung*

$$-\Delta : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$$

*ist ein algebraischer und topologischer Isomorphismus für alle  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$ .*

Die Abbildung  $-\Delta : W_{p,0}^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$  ist also stetig und invertierbar. Außerdem ist folgende Eigenschaft erfüllt.

**Proposition 1** *Es seien  $u, v \in W_{p,0}^2(\Omega)$  mit*

$$-\Delta u \geq 0 \text{ fast überall in } \Omega, \quad -\Delta v \geq 0 \text{ fast überall in } \Omega, \quad u > 0 \text{ in } \Omega, \quad v > 0 \text{ in } \Omega.$$

*Dann existieren geeignet gewählte reelle Zahlen  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ , so dass*

$$\alpha v \leq u \leq \beta v \text{ in } \overline{\Omega} \tag{7}$$

*gilt.*

**Beweis:** Zunächst gilt nach Satz 7

$$u > 0, \quad v > 0 \text{ in } \Omega, \quad u = v = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

sowie

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ und } \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \text{ in } \partial\Omega.$$

Da  $\partial\Omega$  abgeschlossen ist, folgt die Existenz einer reellen Zahl  $\alpha_0 < 0$ , so dass

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < \alpha_0 < 0 \text{ und } \frac{\partial v}{\partial \nu} < \alpha_0 < 0 \text{ in } \partial\Omega \tag{8}$$

erfüllt ist. Damit haben wir für hinreichend kleines  $\alpha_1 > 0$

$$u - \alpha_1 v \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu}(u - \alpha_1 v) < 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Somit existiert eine Umgebung  $U(\partial\Omega) \subset \Omega$  mit

$$u \geq \alpha_1 v \quad \text{in } U(\partial\Omega).$$

Andererseits folgt aus  $v \in W_{p,0}^2(\Omega)$  und  $v > 0$  in  $\Omega$  die Existenz von reellen Zahlen  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$  mit

$$c_1 \leq v \leq c_2 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus U(\partial\Omega).$$

Damit erhalten wir für geeignet gewählte Zahlen  $\alpha_2 > 0$  und  $\alpha_3 > 0$  die Abschätzung

$$\alpha_2 \leq \frac{u}{v} \leq \alpha_3 \quad \text{in } \overline{\Omega} \setminus U(\partial\Omega).$$

Setzen wir jetzt  $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , so ergibt sich schließlich

$$u \geq \alpha v \quad \text{in } \overline{\Omega}.$$

Analog kann man zeigen, dass

$$v \geq \frac{1}{\beta} v \quad \text{in } \overline{\Omega}$$

gilt. ■

Man beachte:

- Entscheidend ist, dass (8) gilt.

- Wir werden später zeigen, dass der erste Eigenwert  $\lambda_1$  des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{fast überall in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

positiv und einfach ist. Es existiert dann eine eindeutig bestimmte normierte Eigenfunktion  $\varphi_1$  zu  $\lambda_1$ , die streng positiv in  $\Omega$  ist. Verwenden wir Proposition 1, so ergibt sich daraus

folgende Eigenschaft:

Falls  $K$  eine beschränkte Menge von Funktionen in  $C_0^1(\overline{\Omega})$  ist, so gilt

$$c_1\varphi_1 < v < c_2\varphi_1 \quad \text{in } \Omega$$

für alle Funktionen  $v \in K$ , falls die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  geeignet gewählt werden.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der *Spektraltheorie für kompakte streng positive Operatoren*, die im Zusammenhang mit unserem Randwertproblem (6) stehen.

**Definition 4** *Es sei  $Y$  ein reeller Banachraum. Eine Teilmenge  $P$  von  $Y$  heißt positiver Kegel, falls folgende Eigenschaften gelten*

$$P + P \subset P, \quad \mathbb{R}_+ P \subset P, \quad P \cap (-P) = \{0\}.$$

Dabei ist  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Der positive Kegel  $P$  induziert eine Ordnung  $\leq$  durch

$$x \leq y \quad \text{genau dann, wenn } y - x \in P$$

*gilt.*

**Beispiel 1** Wir geben einige Beispiele für positive Kegel in Funktionenräumen an.

- Im Raum  $L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , bilden die Menge aller Funktion  $f \in L_p(\Omega)$ , die fast überall nichtnegativ sind, einen positiven Kegel.
- Im Raum  $W_p^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p < \infty$ , bilden die Menge aller Funktion  $f \in W_p^k(\Omega)$ , die fast überall nichtnegativ sind, einen positiven Kegel.
- Im Raum  $C^k(\overline{\Omega})$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , bilden die Menge aller nichtnegativen Funktionen  $f \in C^k(\overline{\Omega})$  einen positiven Kegel. Ein analoges Resultat gilt für die Hölderräume  $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Nach Satz 8 ist

$$-\Delta : W_{p,0}^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

für alle  $p$  mit  $1 < p < \infty$  ein Isomorphismus. Wir definieren jetzt den *positiven Kegel*

$$P = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}\}$$

im Banachraum  $C(\overline{\Omega})$ . Die Elemente von  $\dot{P} = P \setminus \{0\}$  nennen wir *positiv* und  $u$  heißt innerer Punkt von  $P$  genau dann, wenn  $u > 0$  in  $\Omega$  gilt ( $u$  ist *streng positiv*). Offensichtlich ist die Menge

der inneren Punkte von  $P$  nicht leer.

Wir definieren jetzt die Funktion  $e \in W_{p,0}^2(\Omega)$  durch

$$-\Delta e = 1 \text{ fast überall in } \Omega, \quad e = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Verwenden wir jetzt Satz 8, Proposition 1 und Einbettungseigenschaften, so folgt die Eindeutigkeit von  $e \in C^1(\overline{\Omega})$  mit

$$e > 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial e}{\partial \nu} < 0, \quad e = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Jetzt führen wir mittels

$$C_e(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : -\alpha e \leq u \leq \alpha e \text{ für ein } \alpha > 0\}$$

einen Teilraum von  $C(\overline{\Omega})$  ein, der bezüglich der Norm

$$\|u\|_{C_e} = \inf\{\alpha > 0 : -\alpha e \leq u \leq \alpha e\}$$

ein Banachraum ist. Weiterhin definieren wir durch

$$P_e = \{u \in C_e(\overline{\Omega}) : u \geq 0 \text{ in } \overline{\Omega}\}$$

die Menge aller nichtnegativen Funktionen in  $C_e(\overline{\Omega})$ . Dann ist offensichtlich  $P_e$  ein abgeschlossener Kegel in  $C_e(\overline{\Omega})$  mit einer nichtleeren Menge von inneren Punkten ( $e$  ist innerer Punkt). Außerdem sei

$$\dot{P}_e = P_e \setminus \{0\}$$

und  $P_e^0$  die Menge der inneren Punkte von  $P_e$  in der Topology von  $C_e(\overline{\Omega})$ . Im folgenden wollen wir die Elemente von  $\dot{P}_e$  bzw. von  $P_e^0$  als *positive* bzw. *streng positive* Funktionen in  $\Omega$  bezeichnen. Es sei  $f \in L_p(\Omega)$ ,  $p > n$ . Dann heißt  $f$  *positiv*, falls  $f \geq 0$  fast überall in  $\Omega$  gilt und  $f > 0$  auf einer Menge mit positiven Maß ist.

Nach Satz 8 ist die Abbildung

$$-\Delta : W_{p,0}^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

ist ein Isomorphismus für alle  $p$  mit  $1 < p < \infty$ . Somit existiert die inverse Abbildung

$$K = (-\Delta)^{-1} : L_p(\Omega) \rightarrow W_{p,0}^2(\Omega)$$

für alle  $p$  mit  $1 < p < \infty$ , die ebenfalls stetig und linear ist (*Greenscher Operator*). Verwenden wir jetzt Einbettungseigenschaften, siehe Satz 6, sowie die Bemerkung nach Proposition 1, so können wir zeigen, dass die Abbildung

$$K_e = (-\Delta)^{-1} : C_e(\overline{\Omega}) \rightarrow C_e(\overline{\Omega})$$

sinnvoll ist und außerdem kompakt ist.

Es lässt sich auch leicht zeigen, dass für  $v \in C(\overline{\Omega})$  sogar  $Kv \in C_e(\overline{\Omega})$  gilt. Falls  $v \in C(\overline{\Omega})$  ist, so folgt

$$-\|v|C\| \leq v(x) \leq +\|v|C\| \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega},$$

und damit wegen  $Ke = 1$

$$-\|v|C\| Ke(x) \leq Kv(x) \leq +\|v|C\| Ke(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

Jetzt setzen wir  $\alpha = \|v|C\|$ .

Berücksichtigen wir jetzt noch Satz 7 und Proposition 1 so folgt sogar, dass die kompakte Abbildung *streng positiv* ist, d.h., es gilt folgende Aussage:

Falls  $v \in P_e$  mit  $v \neq 0$  in  $\overline{\Omega}$  erfüllt, so folgt  $K_e v \in P_e^0$ . Hierbei verwendeten wir, dass natürlich auch die Einbettungen streng positiv sind.

Unter Verwendung der Theorie für streng positive kompakte lineare Operatoren, siehe z.B. M.A. Krasnosel'skij, *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noordhoff, Groningen 1964 oder M.G. Krein und M.A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Amer. Math. Soc. Transl. **10**(1962), 199–325, gelten folgende Aussagen. Dabei bezeichnet

$$K_e^1 = K_e, \quad K_e^{n+1} = K_e(K_e^n), \quad n \in \mathbb{N},$$

die n-ten Potenzen von  $K_e$ . Wie üblich wird durch

$$\|A\| = \sup_{\|x|B_1\|=1} \|Ax|B_2\|$$

die Norm einer linearen stetigen Abbildung  $A : B_1 \rightarrow B_2$  ( $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ ) zwischen den Banachräumen  $B_1$  und  $B_2$  definiert.

Weiterhin heißt die reelle Zahl  $\lambda$  *Eigenwert* von

$$K_e u = \lambda u, \tag{9}$$

falls eine nichttriviale Lösung  $\varphi \in C_e(\overline{\Omega})$  von (9) existiert. In diesem Fall heißt  $\varphi \neq 0$  *Eigenfunktion* von (9) zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Proposition 2** (i) *Der Spektralradius*

$$r(K_e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K_e^n\|^{1/n}$$

*ist positiv.*

(ii)  $r(K_e)$  ist einfacher Eigenwert von  $K_e$  mit einer Eigenfunktion  $u_1 \in P_e^0$ . Es existiert kein

weiterer Eigenwert von  $K_e$  mit der Eigenschaft, dass die korrespondierende Eigenfunktion zu  $P_e^0$  gehört.

(iii) Für jedes  $f \in \dot{P}_e$  hat die Gleichung

$$\mu u - K_e u = f,$$

$\mu \in \mathbb{R}$ , genau eine Lösung  $u \in P_e^0$ , falls  $\mu > r(K_e)$  gilt, und keine Lösung  $u \in P_e^0$  für  $\mu \leq r(K_e)$ .

Die Gleichung

$$r(K_e)u - K_e u = -f$$

hat keine Lösung  $u \in P_e^0$ .

Wir setzen jetzt  $\mu_1 = r(K_e) > 0$ . Die Einbettung

$$W_{p,0}^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega}), \quad p > n,$$

impliziert, dass  $\mu$  ein Eigenwert von  $K_e$  ist genau dann, wenn  $\mu$  ein Eigenwert von  $K$  ist. Außerdem ergibt sich iterativ aus (9), dass für die zugehörige positive Eigenfunktion sogar  $u_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$  gilt.

Es sei jetzt eine Funktion  $m \in L_\infty(\Omega)$  gegeben. Ausgehend von (6), betrachten wir jetzt folgendes lineares Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda m u \quad \text{fast überall in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (10)$$

Die reelle Zahl  $\lambda$  heißt jetzt *Eigenwert* von (10), falls eine nichttriviale Lösung  $\varphi$  von (10) existiert. In diesem Fall heißt  $\varphi \neq 0$  ebenfalls *Eigenfunktion* von (10) zum Eigenwert  $\lambda$ .

Falls wir  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  und  $K_m(u) = K(mu)$  setzen, so ist das Problem (10) äquivalent zum Eigenwertproblem  $\mu u = K_m(u)$ . Ist also  $\lambda_k$  ein Eigenwert von (10), so ist  $\mu_k = 1/\lambda_k$  ein Eigenwert von  $K_m$  und die Vielfachheiten stimmen überein.

Im folgenden kennzeichnen wir mit

$$\lambda_k(m), \quad \lambda_k(\Omega)$$

die Abhängigkeit des Eigenwertes  $\lambda_k$  von der Funktion  $m \in L_\infty(\Omega)$  bzw. vom beschränkten und glatten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Falls  $m \equiv 1$  gilt, so setzen wir einfach

$$\lambda_k = \lambda_k(1)$$

Unter Verwendung der *Spektraltheorie für kompakte Operatoren*, bezogen auf unseren kompakten Operator  $K_m$ , die oben beschriebene Äquivalenz zwischen  $\lambda_k$  und  $\mu_k$  und der Charakterisierung

der Eigenwerte mittels Variationsproblemen, lassen sich folgende Resultate herleiten. Als Literatur verweisen wir auf R. Courant und D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*, New York, Interscience 1953 oder A. Manes und A.M. Micheletti, *Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital. **7**(1973), 285–301.

**Satz 9** *Es sei  $m \in L_\infty(\Omega)$  mit  $m \geq 0$  in  $\Omega$  und  $m > 0$  auf einer Teilmenge von  $\Omega$  mit positivem Maß.*

(i) *Das Eigenwertproblem (2) besitzt eine Folge von positiven Eigenwerten*

$$0 < \lambda_1(m) < \lambda_2(m) \leq \dots \leq \lambda_k(m) \leq \dots$$

*mit der Eigenschaft  $\lambda_k(m) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Weiterhin ist der Eigenwert  $\lambda_1(m)$  einfach und die zugehörigen Eigenfunktionen wechseln nicht das Vorzeichen auf  $\Omega$ . Insbesondere können wir eine eindeutig bestimmte Eigenfunktion  $\varphi_1(m)$  wählen, so dass*

$$\varphi_1(m) > 0 \text{ in } \Omega, \int_{\Omega} \varphi_1^2(m)(x) dx = 1$$

*erfüllt ist. Es existiert kein weiterer Eigenwert  $\lambda_k(m) \neq \lambda_1(m)$  mit positiven Eigenfunktionen. Mit  $\varphi_k(m)$  bezeichnen wir die zum Eigenwert  $\lambda_k(m)$  gehörende normalisierte Eigenfunktion. Falls  $m \equiv 1$  gilt, so schreiben wir auch  $\varphi_k$ .*

(ii) *(Monotonie)*

(a) *Falls  $0 \leq m_1 < m_2$  fast überall in  $\Omega$  gilt, so folgt  $\lambda_k(m_1) > \lambda_k(m_2)$ . Insbesondere ist  $\lambda_k(m) > 1$ , falls  $m < \lambda_k$  sowie  $\lambda_k(m) < 1$ , falls  $m > \lambda_k$ .*

(b) *Es sei  $\omega \subset \Omega$  ein beschränktes Gebiet. Dann gilt  $\lambda_k(\omega) \geq \lambda_k(\Omega)$ .*

(iii) *(Charakterisierung der Eigenwerte durch Variationsprobleme)*

*Es gilt*

$$\lambda_k(m) = \max_{v \in V_k} \int_{\Omega} m(x)v^2(x) dx,$$

*wobei*

$$V_k = \{v \in W_{2,0}^1(\Omega) : \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = 1, \int_{\Omega} v(x)\varphi_i(m)(x) dx = 0, i = 1, \dots, k-1\}.$$

(iv) *(Stetigkeit)*

*$\lambda_k(m)$  hängt stetig von  $m$  bezüglich der  $L_{n/2}(\Omega)$ -Norm ab.*

**Beweisidee:** Wir werden hier und im Abschnitt 2.5 auf einige Ergebnisse für den klassischen Fall  $m \in L_\infty(\Omega)$ ,  $m > 0$  fast überall in  $\Omega$ , eingehen. Diese Resultate wurden dann in der oben zitierten Arbeit von A. Manes und A.M. Micheletti verallgemeinert.

Zunächst folgt aus dem Maximumprinzip, siehe Satz 7, dass jeder Eigenwert notwendigerweise positiv sein muss. (Dabei verwendet man, dass das Maximumprinzip auch gilt, wenn man den Operator  $-\Delta$  durch  $-\Delta + a(x)\text{id}$  ersetzt, wobei  $a \in L_\infty(\Omega)$  positiv ist. Folglich gilt  $u \geq 0$  und  $-u \geq 0$ , falls  $a(x) := -\lambda m(x) \geq 0$  erfüllt ist.)

Damit ist das Eigenwertproblem (10) äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$K(mu) = \frac{1}{\lambda}u$$

in  $C(\overline{\Omega})$ . Da die Einbettung  $C_e(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  streng positiv ist, folgt, dass der Operator  $T$ , die Einschränkung von  $K(m\cdot)$  auf  $C_e(\overline{\Omega})$  ebenfalls streng positiv und kompakt ist. Außerdem ist die Fixpunktgleichung

$$\frac{1}{\lambda}u = Tu \quad \text{in } C_e(\overline{\Omega})$$

äquivalent zum Eigenwertproblem (10). Damit folgt aber die Aussage (i) aus Proposition 2 sowie der Spektraltheorie für kompakte Operatoren..

Wir definieren jetzt die streng positiven kompakten Operatoren  $T_i$  auf  $C_e(\overline{\Omega})$  durch  $T_i u = K m_i u$ . Somit ist der Operator  $T_2 - T_1$  streng positiv und kompakt. Daraus folgt die Aussage (i) für  $k = 1$ .

Im Abschnitt 2.5 werden wir noch ausführlich auf die Herleitung der Eigenschaften mittels Variationsproblemen eingehen. ■

**Bemerkung 1** (a) Die Bedingung  $m > 0$  fast überall in  $\Omega$  kann man durch  $m \geq 0$  fast überall in  $\Omega$  und  $m \neq 0$  fast überall in  $\Omega$  abschwächen. Dann ist der Operator nicht streng positiv sondern nur noch fast überall streng positiv. Es gilt dann

$$T\left(P_e \setminus \ker(T)\right) \subset P_e^0,$$

aber die Resultate lassen sich alle übertragen.

(b) Verwendet man (a), so kann man die Aussage (ii)(b) im Satz 9 unter Verwendung von Satz 9(ii)(a) herleiten.

(c) Alle Ergebnisse lassen sich jedoch auch unter Verwendung der äquivalenten Variationsprobleme beweisen, siehe R. Courant und D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*, New York, Interscience 1953, Seiten 451 ff.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Existenz von positiven Lösungen. Es sei

$$\varphi_1^m := \varphi_1(m) \in W_{p,0}^2(\Omega), \quad p > n,$$

die zugehörige eindeutige Eigenfunktion zu  $\lambda_1(m) > 0$  mit den Eigenschaften  $\varphi_1^m > 0$  in  $\Omega$  und  $\|\varphi_1^m|_{L_2}\| = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \ker\left(-\Delta - \lambda_1(m) \text{id}\right) &= \{v \in W_{p,0}^2(\Omega) : \Delta v - \lambda_1(m)v = 0 \text{ f.ü. in } \Omega, v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \\ &= \text{span}\{\varphi_1^m\}. \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\varphi_1^m = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad \varphi_1^m > 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi_1^m}{\partial\nu} < 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Falls  $m \equiv 1$  gilt, setzen wir  $\lambda_1(m) = \lambda_1$ ,  $\varphi_1^m = \varphi_1$ . Damit folgt

$$\ker(-\Delta - \lambda_1 \text{id}) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \Delta v - \lambda_1 v = 0 \text{ in } \Omega, v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} = \text{span}\{\varphi_1\}.$$

**Proposition 3** *Es sei  $f \in L_p(\Omega)$ ,  $p > n$ . Die Funktion  $m \in L_\infty(\Omega)$  erfülle  $m > 0$  fast überall in  $\Omega$ .*

(i) *Es sei  $f$  eine positive Funktion und  $\lambda < \lambda_1(m)$ . Dann hat das Randwertproblem*

$$-\Delta u - \lambda m u = f \text{ fast überall in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (11)$$

*genau eine Lösung  $u \in W_{p,0}^2(\Omega)$ , die streng positiv ist. Es gilt  $u > 0$  in  $\Omega$  sowie  $\frac{\partial u}{\partial\nu} < 0$  auf  $\partial\Omega$ .*

(ii) *Es sei  $f$  eine positive Funktion. Falls  $\lambda > \lambda_1(m)$  gilt, so hat (11) keine positive Lösung.*

(iii) *Es sei  $f$  eine negative Funktion. Falls  $\lambda = \lambda_1(m)$  gilt, so hat (11) keine streng positive Lösung.*

**Beweis:** Falls  $\lambda \leq 0$  gilt, so folgt das Ergebnis aus Satz 7 (Maximumprinzip gilt in diesem Fall auch). Wir nehmen jetzt an, dass  $\lambda > 0$  erfüllt ist. Dann ist  $u$  eine Lösung von (11) genau dann, wenn  $u$  eine Lösung von

$$\frac{1}{\lambda} w - K w = \frac{1}{\lambda} K f$$

in  $C_e(\overline{\Omega})$  ist, wobei  $K = K_e$  gilt. Es sei  $f$  positiv. Dann folgt aus den Abbildungseigenschaften von  $K_e$ , dass  $K_e f$  positiv ist und  $K_e f \in P_e^0$  ist. Jetzt folgen die Aussagen mit Proposition 2. ■

Analoge Resultate gelten auch für den Fall, dass  $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  und  $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  erfüllt sind. Diese Ergebnisse stellen eine Verallgemeinerung des **klassischen Maximum-Prinzips** dar:

Es sei  $\lambda < \lambda_1$ , und  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  erfülle

$$-\Delta u - \lambda u \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad u \geq 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

so gilt  $u \geq 0$  in  $\Omega$ .

Für die Funktion  $h$  gelte im folgenden Satz die Eigenschaft  $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ , und die Funktion  $m$  sei hinreichend glatt. Wir betrachten jetzt in  $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  das inhomogene Randwertproblem

$$-\Delta u = \lambda m u + h \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad (12)$$

Unter Verwendung der *Fredholm–Alternative* für kompakte lineare Operatoren erhalten wir schließlich folgende Aussage über die Lösbarkeit von (12).

**Satz 10** (i) Falls  $\lambda$  kein Eigenwert von (10) ist, so hat (12) eine **eindeutige Lösung** für beliebiges  $h$ .

(ii) Falls  $\lambda = \lambda_k$  ein Eigenwert von (10) ist, so ist (12) lösbar genau dann, wenn  $\int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x)dx = 0$  erfüllt ist.

**Bemerkung 2** (a) Im Fall (ii) muss also  $h \perp \varphi_k$  bezüglich des Skalarproduktes

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

gelten. Falls  $u$  eine Lösung ist, so haben wir in diesem Falle **unendlich viele** Lösungen der Form  $u + c\varphi_k$ .

(b) Wir werden später sehen, dass auch eine Fredholm–Alternative für bestimmte Klassen von **nichtlinearen Operatoren** existiert.

## 2.5 Eigenwertprobleme

In Anlehnung an Satz 9 im Abschnitt 2.4 betrachten wir folgendes Eigenwertproblem.

$$\Delta v + \lambda m v = 0 \text{ fast überall in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad (13)$$

Dabei ist  $\Omega$  ein beschränktes glattes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $m \in L_{\infty}(\Omega)$  sei eine Funktion mit  $m \geq 0$  in  $\Omega$  und  $m > 0$  auf einer Teilmenge von  $\Omega$  mit positiven Maß.

Es seien  $v$  und  $w$  hinreichend glatte Funktionen (*zulässige Funktionen*), die die homogene Dirichlet–Randbedingung erfüllen (ausreichend z.B. Stetigkeit in  $\bar{\Omega}$  und stückweise stetige erste partielle Ableitungen in  $\Omega$ ). Dann folgt mit den Integralsätzen von Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x)\Delta w(x)dx &= \int_{\Omega} w(x)\Delta v(x)dx \\ &= - \int_{\Omega} \text{grad } v(x) \cdot \text{grad } w(x)dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx. \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht ableiten, dass (13) **selbstadjungiert** ist. Weiterhin ist die folgende Bezeichnung naheliegend.

**Definition 5** Eine Funktion  $v \in W_{2,0}^1(\Omega)$  heißt *allgemeine oder schwache Lösung* von (13), falls die Integralidentität

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \lambda \int_{\Omega} m(x)v(x)w(x)dx \quad (14)$$

für alle  $w \in W_{2,0}^1(\Omega)$  erfüllt ist.

Dann sind folgende Funktionale für die Formulierung des Variationsproblems für (13) wichtig:

$$\begin{aligned} D[\varphi] &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \|\varphi\|_{W_{2,0}^1}^{1/2} \quad (\text{Poincaré-Ungleichung}), \\ H[\varphi] &= \int_{\Omega} m(x) \varphi^2(x) dx, \\ D[\varphi, \psi] &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx, \\ H[\varphi, \psi] &= \int_{\Omega} m(x) \varphi(x) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Man erhält nun die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen von (13) mittels der folgenden Minimumeigenschaft.

Eine zulässige Funktion  $v$ , für die der Ausdruck  $D[v]$  unter der Nebenbedingung  $H[v] = 1$  ein Minimum annimmt, ist eine Eigenfunktion  $\varphi_1$  von (13). Das Minimum von  $D[\varphi_1]$  ist der zugehörige Eigenwert  $\lambda_1$ .

Falls wir jetzt nicht nur die Bedingung  $H[v] = 1$  sondern auch die *Orthogonalitätsbedingung*  $H[v, \varphi_1] = 0$  fordern, dann ist die entsprechende Lösung des Minimumproblems wieder eine Eigenfunktion  $\varphi_2$  von (13) und der minimale Wert  $D[\varphi_2] = \lambda_2$  ist der zugehörige Eigenwert.

Indem man nun das Minimumproblem  $D[v]$  unter den  $(n - 1)$  Nebenbedingungen

$$H[v] = 1, \quad H[v, \varphi_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

betrachtet, definiert man die Eigenfunktion  $\varphi_n$  von (13), wobei der zugehörige Eigenwert durch  $D[\varphi_n] = \lambda_n$  gegeben ist.

Die Beweise lassen sich mittels der Methoden der Variationsrechnung führen und sind in der oben angegebenen Literatur zu finden. Daraus lassen sich schließlich folgende Eigenschaften ableiten.

**Lemma 1** *Die Funktion  $m$  sei fixiert. Alle Eigenwerte von (13) sind positiv und bilden eine nichtfallende Folge mit  $\lambda_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

Der *Beweis* beruht im wesentlichen auf der Tatsache, dass die Klasse der zulässigen Funktion  $v$  für  $\lambda_n$  eine Teilklasse der zulässigen Funktionen  $v$  für  $\lambda_{n-1}$  ist.

Als nächstes beschäftigen wir uns jetzt mit der *Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte*. Dazu betrachten wir wieder (13), modifizieren aber die Bedingungen an die zulässigen Funktionen  $v$ . Wir ersetzen dabei die  $(n - 1)$  Bedingungen

$$H[v, \varphi_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

durch die  $(n - 1)$  Bedingungen

$$H[v, v_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

wobei die Funktionen  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , **beliebige** stückweise stetige Funktionen in  $\Omega$  sind, d.h., die zulässige Funktionenklasse wird größer. Dann gilt folgende Aussage:

Gegeben seien die  $(n - 1)$  Funktionen  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , die in  $\Omega$  stückweise stetig sind. Dann sei

$$d\{v_1, \dots, v_{n-1}\} = \inf_{v \in V} D[v],$$

wobei mit  $V$  die Menge aller in  $\bar{\Omega}$  stetigen Funktionen  $v$  bezeichnet wird, die in  $\Omega$  stückweise stetig differenzierbar sind sowie die Bedingungen

$$H[v] = 1, \quad H[v, v_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

erfüllen. Setzen wir

$$\lambda_n = \sup_{\{v_1, \dots, v_{n-1}\}} \inf_{v \in V} D[v],$$

so entspricht  $\lambda_n$  den größten Wert, den  $d\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  für beliebige  $(n - 1)$ -Tupel zulässiger Funktionen  $v_1, \dots, v_{n-1}$  annehmen kann. Es gilt:

Dieses Maximum–Minimum wird für

$$v = \varphi_n, \quad v_1 = \varphi_1, \quad v_2 = \varphi_2, \quad \dots, \quad v_{n-1} = \varphi_{n-1}$$

**angenommen.**

**Lemma 2** *Der erste Eigenwert  $\lambda_1$  ist einfach, d.h., es gilt insbesondere  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Die zugehörige Eigenfunktion  $\varphi_1$  verschwindet nicht in  $\Omega$  und ist entweder streng positiv oder streng negativ in  $\Omega$ .*

**Beweisidee:** Die Aussage ergibt sich aus folgender Eigenschaft. Falls

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

die Eigenwerte und  $\varphi_n$  die  $n$ -te Eigenfunktion von (13) sind, so teilt die Menge

$$\{x \in \Omega : \varphi_n(x) = 0\}$$

das Gebiet  $\Omega$  in höchstens  $n$  Teilgebiete. ■

Da allgemein folgende Eigenschaften gelten

1. Schärfere Bedingungen an das Minimum-Problem **verkleinern nicht** den Wert des Minimums,

2. Schwächere Bedingungen an das Minimum-Problems **vergrößern nicht** den Wert des Minimums,

kann man jetzt folgende wichtige Schlussfolgerungen aus der Charakterisierung der Eigenwerte mittels der obigen Variationsprobleme  $D[v]$  treffen.

**Lemma 3** *Der  $k$ -te Eigenwert  $\lambda_k$  ist eine monoton nicht wachsende Funktion bezüglich der Funktion  $m = m(x)$ . Weiterhin gilt, falls*

$$m_1(x) < m_2(x) \text{ fast überall in } \Omega$$

*ist, für die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_k(m_1) > \lambda_k(m_2)$ .*

**Beweisidee:** Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass  $D[v]$  mit der Bedingung

$$H_1[v] = \int_{\Omega} m_1(x)v^2(x)dx$$

größer als  $D[v]$  mit der Bedingung

$$H_2[v] = \int_{\Omega} m_2(x)v^2(x)dx$$

ist. ■

Analog lassen sich schließlich auch die anderen Aussage im Satz 9 herleiten.

Weiterhin gilt auch *folgende Charakterisierung der Eigenwerte*

$$\lambda_k(m) = \max_{v \in V_k} \int_{\Omega} m(x)v^2(x)dx,$$

wobei

$$V_k = \{v \in W_{2,0}^1(\Omega) : \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = 1, \int_{\Omega} v(x)\varphi_i(m)(x)dx = 0, i = 1, \dots, k-1\}$$

ist. Hierbei wird also das Maximum von  $H[v]$  und der Nebendingung  $D[v] = 1$  betrachtet.

Daraus folgt schließlich die Aussage (iii) im Satz 9. Außerdem kann man (iv) herleiten, d.h.,

**Lemma 4**  $\lambda_k(m)$  hängt stetig von  $m$  bezüglich der  $L_{n/2}(\Omega)$ -Norm ab.

### 3 Differentialrechnung in Banachräumen

#### 3.1 Fréchet- und Gâteaux-Ableitung

Es sei  $f(\cdot, \cdot)$  eine auf  $\mathbb{R}^2$  definierte reellwertige Funktion. Wir sind zunächst (als Motivation) an Lösungen der impliziten Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

interessiert. Falls ein Punkt  $(x_0, y_0)$  existiert mit  $f(x_0, y_0) = 0$  und die Funktion  $f$  bestimmte Regularitätsbedingungen erfüllt (ausreichend zweimal stetig differenzierbar) und falls

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

gilt, so folgt mittels des *Satzes über implizite Funktionen*, dass die Gleichung  $f(x, y) = 0$  in einer hinreichend kleinen Umgebung  $U(x_0, y_0)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $y = y(x)$  mit  $f(x, y(x)) = 0$  besitzt.

Unser Ziel besteht nun darin, dieses — auch für den  $\mathbb{R}^n$  bekannte — Ergebnis auf unendlich-dimensionale Banachräume zu übertragen. Dabei wird es sich zeigen, dass der entscheidende Schritt darin besteht, die obige Bedingung  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  durch die Existenz eines stetigen linearen inversen Operators

$$F_v(u_0, v_0)^{-1}$$

zu ersetzen. Damit versucht man in Analogie zum  $\mathbb{R}^n$  das vorliegende i.a. nichtlineare Problem  $F(u, v) = 0$  durch *Linearisierung* lokal zu lösen. Um dieses Ergebnis für Banachräume beweisen zu können, müssen wir zunächst die aus dem  $\mathbb{R}^n$  bekannten Ableitungen (totales Differential, partielle Ableitung) mittels adäquater Ableitungsbegriffe im Rahmen der Banachraum-Theorie verallgemeinern. Das wird durch die Einführung der Fréchet- und Gâteaux-Ableitung erreicht. Falls  $X$  und  $Y$  Banachräume sind, und  $F : X \rightarrow Y$ , so verwenden wir für die Berechnung von  $F(x + h)$  die Linearisierung mittels Differential

$$F(x + h) = F(x) + dF(x; h) + \bar{o}(\|h\|_X).$$

Hierbei ist wie üblich  $\bar{o}$  das Landau-Symbol, d.h., für

$$\omega : U(0) \subset X \rightarrow Y$$

gilt

$$\omega(v) = \bar{o}(\|v\|_X) \quad \text{für } v \rightarrow 0, \quad \text{falls } \frac{\omega(v)}{\|v\|_X} \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow 0.$$

Wie im  $\mathbb{R}^n$  (totales Differential) soll dabei  $dF(x; h)$  den linearen Teil bezüglich  $h$  darstellen. Analog erhält man dann iterativ für fixiertes  $h$  das zweite Differential durch

$$dF(x + k; h) = dF(x; h) + d^2F(x; k, h) + \bar{o}(\|k\|_X).$$

Diese Idee wird jetzt bei der Definition der Fréchet-Ableitung verwendet, indem man

$$F'(x)h = dF(x; h), \quad F''(x)kh = d^2F(x; k, h)$$

setzt.

**Definition 1** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $F : U(x) \subset X \rightarrow Y$ , wobei  $U(x)$  eine Umgebung von  $x$  ist.*

(i) *Die Abbildung  $F$  ist F-differenzierbar in  $x$ , falls ein (von  $x$  abhängiger) Operator*

$$L = L(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

*existiert, so dass*

$$\|F(x + h) - F(x) - Lh\|_Y = \bar{o}(\|h\|_X) \quad \text{falls } h \rightarrow 0 \quad (1)$$

*für alle  $h$  in einer Umgebung  $U(0) \subset X$ .*

*Wir sagen auch, dass die Abbildung  $F : U(x) \rightarrow Y$  in  $x$  Fréchet-differenzierbar oder total-differenzierbar ist. Wir definieren mit  $L = F'(x)$  die F-Ableitung von  $F$  in  $x$ . Das F-Differential in  $x$  ist dann durch  $dF(x; h) = F'(x)h$  gegeben.*

(ii) *Die Abbildung  $F$  ist G-differenzierbar in  $x$ , falls ein (von  $x$  abhängiger) Operator*

$$L = L(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

*existiert, so dass*

$$\|F(x + tk) - F(x) - tLk\|_Y = \bar{o}(t) \quad \text{falls } t \rightarrow 0 \quad (2)$$

*für alle  $k$  mit  $\|k\|_X = 1$  und alle reellen Zahlen  $t \in U(0) \subset \mathbb{R}$ .*

*Wir sagen auch, dass die Abbildung  $F : U(x) \rightarrow Y$  in  $x$  Gâteaux-differenzierbar ist. Wir definieren mit  $L = F'_G(x)$  die G-Ableitung von  $F$  in  $x$ . Das G-Differential in  $x$  ist dann durch  $d_GF(x; h) = F'_G(x)h$  gegeben.*

(iii) *Falls die F-Ableitung  $F'(x)$  (G-Ableitung  $F'_G(x)$ ) für alle  $x \in A \subset X$  existiert, dann heißt die Abbildung*

$$F'(x) : A \subset X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \quad , \quad x \mapsto F'(x)$$

$$F'_G(x) : A \subset X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \quad , \quad x \mapsto F'_G(x)$$

*die F-Ableitung (G-Ableitung) von  $F$  auf  $A$ .*

**Bemerkung 1** (i) Nach (1) und (2) wurden die beiden Ableitungsbegriffe durch Linearisierung eingeführt. Es ist in Analogie zum  $\mathbb{R}^n$  leicht nachzuprüfen, dass  $F'$  und  $F'_G$  eindeutig bestimmt sind, falls sie existieren:

Wir nehmen an, dass (1) auch für einen linearen Operator  $L_1$  gilt. Dann haben wir für alle  $\varepsilon > 0$

$$\|L_1 h - F'(x)h|Y\| \leq \varepsilon \|h|X\|,$$

falls  $\|h|X\| \leq \delta = \delta(\varepsilon, h)$ . Weiterhin ergibt sich für alle  $h \in X$  mit  $\|h|X\| \geq \delta$  wegen

$$\left\| \frac{\delta}{\|h|X\|} h|X \right\| = \delta$$

ebenfalls aus (1)

$$\|(L_1 - F'(x))(\delta \|h|X\|^{-1} h)|Y\| \leq \varepsilon \delta.$$

Verwenden wir jetzt noch die Linearität von  $L_1$  und  $F'(x)$ , so folgt

$$\|(L_1 - F'(x))h|Y\| \leq \varepsilon \|h|X\|$$

für alle  $h \in X$ . Schließlich zeigt  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dass  $L_1 = F'(x)$  gelten muss.

(ii) Verwendet man (2), so folgt

$$F'_G(x)k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + tk) - F(x)}{t}. \quad (3)$$

Setzt man nun  $g(t) = F(x + tk)$  für fixiertes  $x$ ,  $k \in X$ , so erhält man eine Funktion der reellen Variablen  $t$ . Dann gilt für die G-Ableitung

$$g'(0) = \frac{d}{dt} F(x + tk)|_{t=0} = F'_G(x)k,$$

dass sie Ableitung von  $F$  im Punkte  $x$  mit Richtung  $k$  ist. In diesem Sinne kann man die G-Ableitung mit der *Richtungsableitung* für reelle Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  vergleichen.

(iii) Die  $G$ -Ableitung kommutiert mit stetigen linearen Funktionalen, d.h., es gilt

$$\frac{d}{dt}(y^*, F(x + tk))|_{t=0} = (y^*, F'_G(x)k)$$

für alle  $y^* \in Y^*$ .

(iv) Falls  $F$  sogar  $G$ -differenzierbar in  $x + tk$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist, so folgt

$$F(x + k) - F(x) = \int_0^1 F'_G(x + tk)k dt :$$

Nach (iii) haben wir

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(y^*, F(x + tk)) dt = \int_0^1 (y^*, F'_G(x + tk)k) dt.$$

Nach Satz 5 im Abschnitt 2.2 folgt damit

$$(y^*, F(x+k) - F(x)) = (y^*, \int_0^1 F'_G(x+tk)k dt).$$

Da diese Beziehung für alle  $y^* \in Y^*$  gilt, erhalten wir (iv).

**Beispiel 1** Wir wählen  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$  und  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Dann gilt für  $f : X \rightarrow Y$

$$f'(x) = \text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \xi_n} \right),$$

falls alle auftretenden partiellen Ableitungen existieren. Wir erhalten somit

$$df(x; h) = \langle \text{grad } f(x), h \rangle,$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$  ist. Damit kann man die Fréchet-Ableitung als Verallgemeinerung des *totalen Differentials* für reelle Funktionen  $f$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  auffassen, da in diesem Fall die klassische totale Differenzierbarkeit mit der F-Differenzierbarkeit übereinstimmt.

Die Funktion  $f$  ist in  $x \in \mathbb{R}^n$  genau dann G-differenzierbar, wenn ein  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass für alle  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|k\| = 1$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tk) - f(x)}{t} = \sum_{i=1}^n a_i k_i = \langle a, k \rangle.$$

Somit gilt in diesem Fall:

Ist  $f$  in  $x$  F-differenzierbar, so existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x) = a_i$ . Die totale Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x$  ist gesichert, falls die partiellen Ableitungen in  $U(x)$  existieren und in  $x$  stetig sind. In diesem Falle ist  $f$  in  $x$  sowohl F- als auch G-differenzierbar.

Wir geben jetzt einige Eigenschaften der F- und G- Ableitung an.

**Proposition 1** (i) Falls  $F$  Fréchet-differenzierbar ist, so ist  $F$  auch Gâteaux-differenzierbar, und die F-Ableitung in  $x$  ist gleich der G-Ableitung in  $x$ .

(ii) Falls für die G-Ableitung in  $x$  der Grenzübergang in (3) gleichmäßig für alle  $k$  mit  $\|k\| = 1$  erfolgt, so ist diese Ableitung auch die F-Ableitung.

(iii) Falls  $F'_G$  in einer Umgebung  $U(x)$  existiert, und falls  $F'_G$  stetig in  $x$  ist, so ist  $F'_G(x)$  auch die F-Ableitung  $F'(x)$ .

(iv) Falls die Fréchet-Ableitung  $F'(x)$  existiert, so ist  $F$  in  $x$  stetig.

**Beweis.** Die Aussagen (i), (ii) und (iv) folgen unter Verwendung von (1), (2) sowie (3) mit  $h = tk$ .

Wir zeigen (iii). Setzen wir  $g(t) = F(x+th)$ , so erhalten wir mit (3) wie oben

$$g'(t) = F'_G(x+th)h.$$

Somit folgt unter Verwendung der Stetigkeit von  $F'_G(x)$  und des Mittelwertsatzes

$$\|g(b) - g(a) - (b-a)g'(t_0)|Y\| \leq (b-a) \sup_{t \in (a,b)} \|g'(t) - g'(t_0)|Y\|,$$

siehe Abschnitt 2.2.2,

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0) - g'(0)|Y\| &= \|F(x+h) - F(x) - F'_G(x)h|Y\| \\ &\leq \sup_{\tau \in (0,1)} \|F'_G(x+\tau h) - F'_G(x)\| \|h|X\| = \bar{o}(\|h|X\|). \end{aligned}$$

für  $h \rightarrow 0$ . ■

**Bemerkung 2** (i) Falls  $F$  Fréchet-differenzierbar und falls  $F'(x)$  für alle  $x \in U \subset X$  stetig ist, so schreiben wir  $F \in C^1(U, Y)$ .

(ii) Die Umkehrung von Proposition 1 gilt i.a. nicht. Man verwende z.B. M.S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis*, S.68ff. Außerdem folgt aus der  $G$ -Differenzierbarkeit von  $F$  noch nicht die Stetigkeit. Das ergibt sich zum Beispiel aus entsprechenden Resultaten für den  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 2** (i) Die konstante Funktion  $F(x) = c$  ist  $F$ -differenzierbar für alle  $x \in X$  und es gilt  $F'(x) = 0$ .

(ii) Falls  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , so ist wegen  $A(x+h) - A(x) = A(h)$  die Abbildung  $A$  für alle  $x \in X$  ebenfalls  $F$ -differenzierbar mit  $A'(x) = A$ .

Im folgenden geben wir einige Differentiationsregeln an, die die bekannten Regeln für das totale Differential im  $\mathbb{R}^n$  auf den hier vorliegenden Banachraum-Fall übertragen. Der Beweis erfolgt analog.

**Proposition 2** (i) (Summenregel)

Die Abbildungen  $F_1, F_2 : U(x) \subset X \rightarrow Y$  seien  $F$ -differenzierbar in  $x$ . Dann ist auch  $\alpha F_1 + \beta F_2$  für alle reellen  $\alpha$  und  $\beta$   $F$ -differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha F_1 + \beta F_2)'(x) = \alpha F_1'(x) + \beta F_2'(x).$$

(ii) (Produktregel)

Gegeben seien die Banachräume  $X, X_1, X_2$  und  $Y$ . Weiterhin sei

$$B : X_1 \times X_2 \rightarrow Y, \quad (x_1, x_2) \rightarrow B(x_1, x_2)$$

bilinear und es existiert ein  $c > 0$ , so dass für alle  $x_i \in X_i, i = 1, 2$ ,

$$\|B(x_1, x_2)|Y\| \leq c \|x_1|X_1\| \|x_2|X_2\|$$

erfüllt ist. Falls

$$F_i : U_i(x) \subset X \rightarrow X_i, \quad i = 1, 2,$$

in  $x$   $F$ -differenzierbar ist, so ist die Abbildung

$$H(x) = B(F_1(x), F_2(x)) : X \rightarrow Y$$

in  $x$  ebenfalls  $F$ -differenzierbar und es gilt

$$H'(x)h = B(F_1'(x)h, F_2(x)) + B(F_1(x), F_2'(x)h), \quad h \in X.$$

(iii) (Kettenregel)

Es seien  $F_1 : \mathcal{O}_1 \rightarrow Y$  und  $F_2 : \mathcal{O}_2 \rightarrow Z$ , wobei  $\mathcal{O}_1 \in X$ ,  $\mathcal{O}_2 \in Y$  offen mit  $F_1(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2$ . Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$F_2 \circ F_1 : \mathcal{O}_1 \rightarrow Z, \quad F_2 \circ F_1(x) = F_2(F_1(x)).$$

Falls  $F_1$  in  $x \in \mathcal{O}_1$  und  $F_2$  in  $y = F_1(x) \in \mathcal{O}_2$   $F$ -differenzierbar ist, so ist auch  $F_2 \circ F_1$  in  $x$   $F$ -differenzierbar, und es gilt

$$(F_2 \circ F_1)'(x) = F_2'(F_1(x)) \circ F_1'(x) = F_2'(F_1(x))F_1'(x).$$

**Beweis:** Die Aussage (i) folgt aus (1) bzw. (2), indem man die entsprechenden Darstellungen von  $\alpha F_1$  und  $\beta F_2$  addiert.

Wir zeigen (ii). Dazu setzen wir

$$F_i(x+h) = F_i(x) + F_i'(x)h + \bar{o}(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0,$$

in die bilineare Abbildung  $B(\cdot, \cdot)$  ein und verwende die Voraussetzung an  $B$ .

Wir beweisen (iii). Nach Voraussetzung gilt

$$F_2(F_1(x) + k) = F_2(F_1(x)) + F_2'(F_1(x))k + \bar{o}(\|k\|_Y), \quad k \rightarrow 0,$$

$$k := F_1(x+h) - F_1(x) = F_1'(x)h + \bar{o}(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0,$$

und somit

$$F_2(F_1(x+h)) = F_2(F_1(x)) + F_2'(F_1(x)) \cdot F_1'(x)h + \bar{o}(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0,$$

Die Produktformel in (ii) stellt also die Verallgemeinerung der klassischen Produktregel in  $\mathbb{R}$

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

mit  $B(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  dar.

Analoge Resultate gelten für die G-Ableitung.

**Beispiel 3** (i) Es sei für  $X = C^2[0,1]$  und  $Y = C[0,1]$  die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  gegeben durch

$$F(u) = u'' + u^3 = L(u) + N(u).$$

Dann gilt für  $F'(u)v = L'(u)v + N'(u)v$  die Beziehung

$$L'(u)v = v'', \quad N'(u)v = 3u^2v,$$

da  $L$  linear ist (siehe Beispiel 2) und

$$N(u+v) - N(u) = (u+v)^3 - u^3 = 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3u^2v + o(\|v\|_X).$$

(ii) Allgemein gilt für  $N(u) = f(u)$ , wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend glatt ist,

$$N'(u)v = f'(u)v.$$

**Beispiel 4** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand  $\partial\Omega$ . Als Banachräume  $X$  und  $Y$  wählen wir für  $\alpha \in (0,1)$  die Hölderräume  $X = C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  und  $Y = C^\alpha(\overline{\Omega})$ . Es sei nun  $F : X \rightarrow Y$  gegeben durch  $F(u) = -\Delta u + f(\cdot, u)$ .

Man zeige, dass  $F$  Fréchet-differenzierbar ist, falls  $f(x, \xi) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend glatt ist, und dass dann

$$F'(u)v = -\Delta v + \frac{\partial f}{\partial \xi}(\cdot, u)v$$

gilt.

### 3.2 Nemytskij–Operatoren

Wir untersuchen jetzt die Abbildungseigenschaften für eine Klasse von Operatoren, die in der nichtlinearen Analysis eine große Bedeutung besitzen.

Falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes und beschränktes Gebiet ist, so bezeichnen wir mit  $M(\Omega)$  die Menge aller (Lebesgue-)messbaren reellwertigen Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Klasse der messbaren Funktionen ist ziemlich groß. „Fast jede“ auf  $\Omega$  definierte Funktion  $u$  ist messbar. Falls die Funktionen  $u_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , messbar sind, so betrachten wir die durch Komposition definierte Funktion

$$g(x) = h(x; u_1(x), \dots, u_m(x)).$$

Im allgemeinen ist dann diese Funktion  $g(x)$  nicht mehr auf  $\Omega$  messbar. Aus diesem Grunde führen wir jetzt die *Carathéodory–Eigenschaft* ein, mit deren Hilfe sich unsere Ergebnisse einfacher formulieren lassen.

**Definition 2** *Es sei  $\Omega$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Weiterhin sei die Funktion*

$$h(x; \xi)$$

*auf  $\Omega \times \mathbb{R}^m$  definiert. Wir sagen, dass die Funktion  $h$  die Carathéodory–Eigenschaft besitzt, falls*

(i) *für alle  $\xi \in \mathbb{R}^m$  ist die Funktion*

$$h_\xi(x) = h(x; \xi)$$

*(als Funktion der Variable  $x$ ) auf  $\Omega$  messbar,*

(ii) *für fast alle  $x \in \Omega$  ist die Funktion*

$$h_x(\xi) = h(x; \xi)$$

*(als Funktion der Variable  $\xi$ ) auf  $\mathbb{R}^m$  stetig.*

**Bemerkung 3** (i) Falls die Funktion  $h$  die Carathéodory–Bedingung erfüllt, so schreiben wir

$$h \in CAR.$$

(ii) Da jede stetige Funktion messbar ist, ergibt sich sofort:

*Falls die Funktion  $h = h(x; \xi)$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}^m$  stetig ist, so gilt  $h \in CAR$ .*

Die Bedeutung der Carathéodory–Bedingung ergibt sich aus folgendem Resultat.

**Satz 1** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Die Funktion  $h = h(x; \xi)$  sei für  $x \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^m$  definiert. Weiterhin gelte  $h \in CAR$ . Falls die Funktionen  $u_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , auf  $\Omega$  messbare Funktionen sind, so ist auch die durch Komposition definierte Funktion*

$$g(x) = h(x; u_1(x), \dots, u_m(x))$$

*auf  $\Omega$  messbar.*

**Beweisidee:** Ein Beweis kann zum Beispiel in M.M. Vajnberg, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day 1964, gefunden werden. Wir bemerken an dieser Stelle nur, dass der Beweis nicht einfach ist und insbesondere klassische Ergebnisse aus der Maßtheorie verwendet. So liefert das sogenannte *Lusin-Theorem*, siehe zum Beispiel A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Prentice-Hall 1970, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Messbarkeit einer Funktion. Unter Verwendung der Carathéodory-Eigenschaft folgt dann damit, dass die Funktion  $g(x)$  ebenfalls messbar ist.

### **Lusin-Theorem**

Es sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\text{meas } B < \infty$ . Eine auf der Menge  $B \times \mathbb{R}^m$  definierte Funktion hat die Eigenschaft *CAR* genau dann, wenn sie die Eigenschaft (S) hat, d.h., wenn es für jedes  $\eta > 0$  eine abgeschlossene Menge  $F \subset B$  so gibt, dass

- (i)  $\text{meas } F \geq \text{meas } B - \eta$ ,
- (ii)  $g$  ist auf  $F \times \mathbb{R}^m$  (bezüglich  $F \times \mathbb{R}^m$ ) stetig. ■

Wir führen jetzt einen weiteren wichtigen Begriff der nichtlinearen Analysis ein.

**Definition 3** *Es sei die Funktion  $h = h(x; \xi)$  für alle  $x \in \Omega$  und alle  $\xi \in \mathbb{R}^m$  definiert. Weiterhin gelte  $h \in CAR$ . Dann ist der Nemytskij-Operator  $\mathcal{H}$  für das  $m$ -Tupel von messbaren Funktionen  $u_i = u_i(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, m$ , durch*

$$\mathcal{H}(u_1, \dots, u_m)(x) = h(x; u_1(x), \dots, u_m(x))$$

*definiert.*

**Bemerkung 4** (i) Der Buchstabe  $\mathcal{H}$  wurde von dem russischen Buchstaben  $H \sim N$  für Nemytskij abgeleitet. (siehe auch Agatha Christie, *Murder in the Calais Coach*, Poirots Ermittlungen).  
(ii) Theorem 1 garantiert, dass der Nemytskij-Operator ein  $m$ -Tupel von messbaren Funktionen auf eine messbare Funktion abbildet.

Für viele Anwendungen sind insbesondere Nemytskij-Operatoren interessant, die auf Räumen vom Typ  $L_p(\Omega)$  bzw.  $C(\overline{\Omega})$  definiert sind (siehe auch die früheren Beispiele 3 und 4). Der zweite

Fall  $C(\overline{\Omega})$  lässt sich einfach behandeln. Wir geben aus Vollständigkeitsgründen einige Ergebnisse für die  $L_p$ -Theorie an, welche für viele Untersuchungen im Rahmen der nichtlinearen Analysis wichtig sind. Wir beginnen zunächst mit der Stetigkeit des Nemytskij-Operators. Für zusätzliche Bemerkungen und ausführliche Beweise verweisen wir auf das obige Buch von M.M. Vajnsberg.

**Satz 2** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, und für die reellen Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_m$  und  $r$  gelte  $p_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sowie  $r \geq 1$ . Die Funktion  $h \in C^1$  sei auf  $\Omega \times \mathbb{R}^m$  definiert. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{H}$  den durch die Funktion  $h$  definierten Nemytskij-Operator.*

(i) *Dann gilt für jedes  $m$ -Tupel von Funktionen  $u_i \in L_{p_i}(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,*

$$\mathcal{H}(u_1, \dots, u_m) \in L_r(\Omega)$$

*genau dann, wenn die folgende Wachstums-Bedingung erfüllt ist:*

*Es existiert ein Funktion  $g \in L_r(\Omega)$  und eine positive Zahl  $c$ , so dass für fast alle  $x \in \Omega$  und alle  $\xi \in \mathbb{R}^m$*

$$|h(x; \xi_1, \dots, \xi_m)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^m |\xi_i|^{p_i/r}. \quad (4)$$

(ii) *Falls (4) erfüllt ist, so definiert der Nemytskij-Operator  $\mathcal{H}$  eine stetige Abbildung vom kartesischen Produkt*

$$L_{p_1}(\Omega) \times \dots \times L_{p_m}(\Omega)$$

*in den Raum  $L_r(\Omega)$ .*

**Bemerkung 5** (i) Falls  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , Banachräume mit der Norm  $\|\cdot\|_{X_i}$  sind, so bezeichnet die Menge  $X$  aller  $k$ -Tupels

$$(u_1, \dots, u_k), u_i \in X_i, i = 1, \dots, k,$$

das kartesische Produkt der Räume  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , und wird mit

$$X = X_1 \times \dots \times X_k$$

bezeichnet. Der Raum  $X$  ist wieder ein Banachraum, falls die Norm in  $X$  zum Beispiel durch

$$\|(u_1, \dots, u_k)\|_X = \left( \sum_{i=1}^k \|u_i\|_{X_i}^s \right)^{1/s},$$

definiert wird, wobei  $s \in [1, \infty)$  fixiert ist.

(ii) Eine *besondere Eigenschaft* des i.a. **nichtlinearen** Nemytskij-Operator  $\mathcal{H}$ , die wir später nur verwenden werden, ist also, dass sich aus der Wachstumsbedingung (4) folgende Eigenschaften ergeben:

- $\mathcal{H} : L_{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L_{p_m}(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$
- $\mathcal{H} : L_{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L_{p_m}(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$  ist beschränkt
- $\mathcal{H} : L_{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L_{p_m}(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$  ist stetig.

Zum Beweis verwenden wir eine Reihe von Ergebnissen, die wir in den folgenden Lemmata beweisen werden.

**Definition 4** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet mit glattem Rand und

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

eine Folge messbarer Funktionen, die auf  $\Omega$  definiert sind und dort fast überall endlich sind. Die Folge  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  konvergiert auf  $\Omega$  dem Maße nach gegen die Funktion  $f$ , falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{meas}\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

gilt.

**Bemerkung 6** (i) Falls  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  eine Folge messbarer Funktionen ist, die auf  $\Omega$  dem Maße nach gegen  $f$  konvergiert, so ist  $f$  ebenfalls eine messbare Funktion.

(ii) In den folgenden Untersuchungen nehmen wir in der Regel an, dass  $m = 1$  gilt. Der Fall für  $m \geq 2$  erfolgt analog.

**Lemma 1** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$$

eine Folge von messbaren Funktionen, die auf  $\Omega$  definiert sind und dem Maße nach gegen  $u_0$  konvergiert. Die Funktion  $h \in CAR$  sei auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{H}$  den durch die Funktion  $h$  definierten Nemytskij-Operator.

Dann konvergiert die Folge

$$\{\mathcal{H}(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

auf  $\Omega$  dem Maße nach gegen die Funktion  $\mathcal{H}(u_0)$ .

**Beweis:** Es sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $k = 1, 2, \dots$ , sei  $\Omega_k$  die Menge der  $x \in \Omega$ , so dass für jedes  $s \in \mathbb{R}$  mit

$$|u_0(x) - s| < \frac{1}{k}$$

die Ungleichung

$$|h(x; u_0(x)) - h(x; s)| < \varepsilon$$

gilt. Dann gilt  $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $h \in CAR$  gilt und somit für fast alle  $x \in \Omega$  die Funktion  $h_x$  stetig ist, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{meas } \Omega_k = \text{meas } \Omega.$$

Für ein beliebiges  $\eta > 0$  gibt es also ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\text{meas } \Omega_{k_0} > \text{meas } \Omega - \eta$$

ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir jetzt

$$\begin{aligned} F_n &= \{x \in \Omega : |u_0(x) - u_n(x)| < \frac{1}{k_0}\}, \\ D_n &= \{x \in \Omega : |\mathcal{H}(u_0)(x) - \mathcal{H}(u_n)(x)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Da die Folge  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  auf  $\Omega$  dem Maße nach gegen die Funktion  $u_0$  konvergiert, existiert eine Zahl  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung

$$\text{meas } F_n > \text{meas } \Omega - \eta$$

gilt. Da

$$\Omega_{k_0} \cap F_n \subset D_n$$

ist, folgt also

$$\text{meas } D_n > \text{meas } \Omega - \eta.$$

■

**Lemma 2** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Die Funktion  $h \in CAR$  sei auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{H}$  den durch die Funktion  $h$  definierten Nemytskij-Operator. Weiterhin gelte  $1 \leq p < \infty$  und  $1 \leq r < \infty$ . Wir nehmen an, dass*

$$\mathcal{H} : L_p(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$$

*gilt.*

*Dann ist  $\mathcal{H}$  ein stetiger Operator, der den Raum  $L_p(\Omega)$  in den Raum  $L_r(\Omega)$  abbildet.*

**Beweis:** 1. *Schritt* Wir setzen zunächst voraus, dass  $\mathcal{H}(0) = 0$  ist. Wir zeigen, dass  $\mathcal{H}$  in  $0 \in L_p(\Omega)$  stetig ist.

Wir nehmen jetzt indirekt an, dass  $\mathcal{H}$  im Punkt 0 nicht stetig ist. Unser Beweis wäre beendet,

wenn wir unter dieser Annahme eine Funktion  $\psi \in L_p(\Omega)$  konstruieren können, für die  $\mathcal{H}(\psi) \notin L_r(\Omega)$  gilt.

Mit dieser Annahme existieren also eine Folge  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset L_p(\Omega)$  mit  $\varphi_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  in  $L_p(\Omega)$  und ein  $\alpha > 0$ , so dass

$$\int_{\Omega} |\mathcal{H}(\varphi_n)(x)|^r dx > \alpha \quad (5)$$

für  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir konstruieren jetzt davon eine Teilfolge  $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , eine Folge positiver Zahlen  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  und eine Folge  $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$  von Teilmengen von  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften

- (a)  $\varepsilon_{k+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_k$ ,
- (b)  $\text{meas } \Omega_k \leq \varepsilon_k$ ,
- (c)  $\int_{\Omega_k} |\mathcal{H}(\varphi_{n_k})(x)|^r dx > \frac{2}{3}\alpha$ ,
- (d) für jede messbare Menge  $D \subset \Omega$ ,  $\text{meas } D < 2\varepsilon_{k+1}$  gilt
 
$$\int_D |\mathcal{H}(\varphi_{n_k})(x)|^r dx < \frac{1}{3}\alpha,$$
- (e)  $\int_{\Omega} |\varphi_{n_k}(x)|^p dx < \varepsilon_k$ .

Die Folgenglieder  $\varepsilon_k$ ,  $\Omega_k$  sowie  $\varphi_{n_k}$  werden induktiv definiert. Wir setzen  $\varepsilon_1 = \text{meas } \Omega$ ,  $\varphi_{n_1} = \varphi_1$ ,  $\Omega_1 = \Omega$ . Es sei nun  $\varepsilon_{k+1}$  eine Zahl, für die (d) und (e) erfüllt ist. Das ist möglich, da das Integral absolut stetig ist und  $\mathcal{H}(\varphi_{n_k}) \in L_r(\Omega)$  gilt. Da die Funktion  $\varphi_{n_k}$  die Bedingung (c) erfüllt, ist wegen (b) auch (a) erfüllt.

Wir konstruieren jetzt  $\Omega_{k+1}$  und  $\varphi_{n_{k+1}}$ . Da eine in  $L_p(\Omega)$  konvergente Folge auch dem Maße nach in  $\Omega$  konvergiert, existiert also eine natürliche Zahl  $n_{k+1}$  und eine Menge  $F_{k+1} \subset \Omega$  derart, dass

$$\text{meas } \Omega - \text{meas } F_{k+1} < \varepsilon_{k+1} \quad (6)$$

und

$$|\mathcal{H}(\varphi_{n_{k+1}})(x)| < \left( \frac{\alpha}{3 \text{meas } \Omega} \right)^{1/r}, \quad x \in F_{k+1}, \quad (7)$$

gilt. Wir setzen jetzt  $\Omega_{k+1} = \Omega \setminus F_{k+1}$ . Die Menge  $\Omega_{k+1}$  genügt der Bedingung (b) (wegen (6)) und auch (c), da wir mittels (5) und (7) die Abschätzung

$$\int_{\Omega_{k+1}} |\mathcal{H}(\varphi_{n_{k+1}})(x)|^r dx = \int_{\Omega} |\mathcal{H}(\varphi_{n_{k+1}})(x)|^r dx - \int_{F_{k+1}} |\mathcal{H}(\varphi_{n_{k+1}})(x)|^r dx > \frac{2}{3}\alpha$$

erhalten. Wir definieren jetzt für  $k \in \mathbb{N}$  die Mengen  $D_k$  durch

$$D_k = \Omega_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i.$$

Dann haben wir  $\text{meas } D_k \leq \varepsilon_k$ , und die Mengen  $D_k$  sind paarweise disjunkt. Weiterhin gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\varphi_{n_k}(x)|^p dx < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty, \quad (8)$$

da die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$$

nach Konstruktion konvergiert und

$$\int_{\Omega} |\varphi_{n_k}(x)|^p dx$$

eine beschränkte Folge ergibt. Verwenden wir jetzt Lemma 1, so folgt hieraus, dass  $\mathcal{H}(\varphi_{n_k})$  dem Maße nach in  $\Omega$  gegen die Nullfunktion konvergiert. Wegen (a) gilt

$$\text{meas } \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i < 2\varepsilon_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Wir definieren jetzt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_{n_k}(x) & \text{falls } x \in D_k, \\ 0 & \text{falls } x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i. \end{cases}$$

Wegen (8) gilt  $\psi \in L_p(\Omega)$ . Auf der anderen Seite haben wir  $\mathcal{H}(\psi) \notin L_r(\Omega)$ : Wegen (9), (d) und (e) gilt

$$\begin{aligned} \int_{D_k} |\mathcal{H}(\psi)(x)|^r dx &\geq \int_{\Omega_k} |\mathcal{H}(\varphi_{n_k})(x)|^r dx \\ &\quad - \int_{\Omega_k \setminus D_k} |\mathcal{H}(\varphi_{n_k})(x)|^r dx > \frac{\alpha}{3}, \end{aligned} \quad (10)$$

und weil die Mengen  $D_k$  paarweise disjunkt sind, erhalten wir aus (10) die Ungleichung

$$\int_{\Omega} |\mathcal{H}(\psi)(x)|^r dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} |\mathcal{H}(\psi)(x)|^r dx = \infty.$$

Damit haben wir aber einen Widerspruch zur Voraussetzung  $\mathcal{H}(\psi) \in L_r(\Omega)$ .

*2. Schritt* Wir betrachten den allgemeinen Fall. Es sei also  $u_0 \in L_p(\Omega)$ . Dann setzen wir

$$h_1(x; s) = h(x; u_0(x) + s) - h(x; u_0(x))$$

für  $x \in \Omega$  und  $s \in \mathbb{R}$ . Es gilt  $h_1 \in CAR$  und  $\mathcal{H}_1(0) = 0$ . Nach dem ersten Schritt ist  $\mathcal{H}_1$  im Punkt 0 stetig. Daraus folgt aber sofort die Stetigkeit von  $\mathcal{H}$  im Punkt  $u_0 \in L_p(\Omega)$ . ■

**Lemma 3** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und die Funktion  $h \in CAR$  sei auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{H}$  den durch die Funktion  $h$  definierten Nemytskij-Operator. Weiterhin gelte  $1 \leq p < \infty$  und  $1 \leq r < \infty$ . Wir nehmen an, dass*

$$\mathcal{H} : L_p(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$$

gilt.

Dann ist  $\mathcal{H}$  ein beschränkter Operator, der den Raum  $L_p(\Omega)$  in den Raum  $L_r(\Omega)$  abbildet.

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $\mathcal{H}(0) = 0$  gilt. Nach Lemma 2 (Stetigkeit) existiert eine Zahl  $\rho > 0$ , so dass

$$\int_{\Omega} |\mathcal{H}(\varphi)(x)|^r dx \leq 1 \quad (11)$$

ist, falls für beliebiges  $\varphi \in L_p(\Omega)$  die Ungleichung

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx < \rho^p$$

erfüllt ist. Es sei jetzt  $u \in L_p(\Omega)$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$n\rho^p \leq \|u\|_{L_p}^p \leq (n+1)\rho^p$$

ist. Weiterhin existieren Mengen  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$ , so dass

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_i$$

und

$$\int_{\Omega_i} |u(x)|^p dx \leq \rho^p, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

erfüllt ist. Unter Verwendung von (11) folgt dann

$$\|\mathcal{H}(u)\|_{L_r(\Omega)}^r \leq \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega_i} |\mathcal{H}(u)(x)|^r dx \leq n+1 \leq \left(\frac{\|u\|_{L_p}}{\rho}\right)^p + 1$$

■

**Lemma 4** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und die Funktion  $h \in C^1$  sei auf  $\Omega \times \mathbb{R}^m$  definiert. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{H}$  den durch die Funktion  $h$  definierten Nemytskij-Operator. Für  $a > 0$  setzen wir*

$$S_a = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : |\xi_i| \leq a, i = 1, \dots, m\}.$$

*Dann ist die Funktion*

$$\varphi(x) = \sup\{|h(x; \xi_1, \dots, \xi_m)| : (\xi_1, \dots, \xi_m) \in S_a\}$$

*auf  $\Omega$  messbar.*

**Beweis:** Zum Beweis verwendet man wieder das *Lusin-Theorem*. ■

**Lemma 5** Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen und Voraussetzungen wie im obigen Lemma 4. Dann existiert mindestens ein  $m$ -Tupel von auf  $\Omega$  messbaren Funktionen

$$(\psi_1, \dots, \psi_m),$$

für das

$$\varphi(x) = |h(x; \psi_1(x), \dots, \psi_m(x))|$$

für fast alle  $x \in \Omega$  gilt.

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage für  $m = 1$ , den allgemeinen Fall kann man induktiv zeigen. Wir setzen

$$\psi_1(x) = \min\{\xi_1 : |\xi_1| \leq a, |h(x; \xi_1)| = \varphi(x)\}.$$

(Diese Funktion ist fast überall auf  $\Omega$  definiert, da  $h \in CAR$ .) Es sei  $\beta \in (-a, a)$  und  $P_\beta = [-a, \beta]$ . Nach Lemma 4 sind  $\varphi$  und

$$\varphi_\beta(\cdot) = \sup_{\xi_1 \in P_\beta} |h(\cdot; \xi_1)|$$

für jedes  $\beta \in (-a, a)$  auf  $\Omega$  messbare Funktionen. Somit ist auch die Funktion

$$f = \frac{1 + \varphi}{1 + \varphi_\beta}, \quad f \geq 1,$$

auf  $\Omega$  messbar, d.h., für jedes  $y \in \mathbb{R}$  ist die Menge

$$\{x \in \Omega : f(x) > y\}$$

messbar. Da in unserem Fall

$$\{x \in \Omega : f(x) > 1\} = \{x \in \Omega : \psi_1(x) > \beta\}$$

gilt, ist somit auch die Funktion  $\psi_1$  auf  $\Omega$  messbar. ■

**Beweis von Satz 2:** 1. Schritt Falls (4) gilt, so kann man leicht zeigen, dass der Operator  $\mathcal{H}$  das kartesische Produkt  $L_{p_1}(\Omega) \times \dots \times L_{p_m}(\Omega)$  in  $L_r(\Omega)$  abbildet. Das ist eine Konsequenz aus der bekannten Ungleichung

$$(d_1 + \dots + d_k)^r \leq k^{r-1}(d_1^r + \dots + d_k^r),$$

falls  $d_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , und  $r \geq 1$  erfüllt ist. Wir betrachten jetzt wieder nur den Fall  $m = 1$  im obigen Satz 2. Damit erhalten wir unter Verwendung von (4)

$$\begin{aligned} |h(x; u(x))|^r &\leq \left[ |g(x)| + c |u(x)|^{p/r} \right]^r \\ &\leq 2^{r-1} \left[ |g(x)|^r + c^r |u(x)|^p \right]. \end{aligned}$$

Das Integral des letzten Ausdrucks ist damit endlich, da  $g \in L_r(\Omega)$  und  $u \in L_p(\Omega)$  nach Voraussetzung gilt. Somit erhalten wir

$$\mathcal{H}(u)(x) = h(x; u(x)) \in L_r(\Omega).$$

Nach Lemma 2 ist der Operator  $\mathcal{H}$  auch stetig.

2. *Schritt* Es sei

$$\mathcal{H} : L_p(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega).$$

Dann existiert nach Lemma 3 eine Zahl  $c > 0$ , so dass für alle  $u \in L_p(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq 1$$

die Abschätzung

$$\int_{\Omega} |h(x; u(x))|^r dx \leq c^r$$

gilt. Wir setzen jetzt

$$f(x; \xi) = \begin{cases} |h(x; \xi)| - c|\xi|^{p/r} & : \text{für } |h(x; \xi)| \geq c|\xi|^{p/r}, \\ 0 & : \text{für } |h(x; \xi)| < c|\xi|^{p/r}. \end{cases}$$

Für  $(x; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$  mit  $f(x; \xi) \neq 0$  gilt

$$|f(x; \xi)|^r \leq |h(x; \xi)|^r - c^r |\xi|^p.$$

Wir setzen

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : f(x; u(x)) > 0\}.$$

Dann existieren Mengen  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , so dass

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_i$$

und

$$\int_{\Omega_i} |u(x)|^p dx < 1, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

ist. Also gilt nach oben

$$\int_{\tilde{\Omega}} |h(x; u(x))|^r dx \leq (n+1)c^r$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x; u(x))|^r dx &= \int_{\tilde{\Omega}} |f(x; u(x))|^r dx \\ &\leq \int_{\tilde{\Omega}} |h(x; u(x))|^r dx - c^r \int_{\tilde{\Omega}} |u(x)|^p dx \leq c^r. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Funktion  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt die Carathéodory–Eigenschaft. Nach Lemma 5 existiert eine Funktion  $\psi_n$ , die auf  $\Omega$  messbar ist, mit

$$f(x, \psi_n(x)) = \sup_{-n \leq \xi \leq n} f(x, \xi).$$

Dann ist leicht zu sehen, dass  $\psi_n \in L_p(\Omega)$  gilt (nach Konstruktion beschränkt fast überall in  $\Omega$ ). Wir definieren jetzt

$$g(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} f(x, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, \psi_n(x)).$$

Die Funktion  $g$  ist als Limes von messbaren Funktionen auch auf  $\Omega$  messbar. Dann folgt aus (12) und dem Lemma von Levi/Fatou

$$\int_{\Omega} |g(x)|^r dx \leq \sup_n \int_{\Omega} |f(x, \psi_n(x))|^r dx \leq c^r.$$

Also haben wir

$$g \in L_r(\Omega)$$

und nach Definition von  $f$

$$g(x) \geq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (|h(x; \xi)| - c|\xi|^{p/r}).$$

und somit für fast alle  $x \in \Omega$  und alle  $\xi \in \mathbb{R}$

$$|h(x; \xi)| \leq g(x) + c|\xi|^{p/r}$$

■

Wir betrachten jetzt nur noch den Fall  $\mathcal{H}(u)$ , d.h., wir setzen nun stets  $m = 1$ . Ergebnisse für  $m \geq 2$  lassen sich analog beweisen.

Nun beschäftigen wir uns mit der Differenzierbarkeit des Nemytskij–Operators  $\mathcal{H}$ , d.h., wir sind an  $\mathcal{H} \in C^1(X, Y)$  mit geeignet gewählten Banachräumen  $X$  und  $Y$  interessiert.

Es sei  $p > 2$ . Weiterhin setzen wir voraus, dass die erzeugende Funktion  $h(x; \xi)$  die partielle Ableitung

$$h_{\xi}(x; \xi) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(x; \xi)$$

besitzt und diese sowohl die Carathéodory–Bedingung (CAR) als auch die folgende Wachstumsbedingung

$$|h_{\xi}(x; \xi)| \leq a + b|\xi|^{p-2} \tag{13}$$

für geeignet gewählte positive Konstanten  $a$  und  $b$  erfüllt.

Verwenden wir jetzt die Resultate aus Satz 2, so ist ebenfalls der Nemytskij–Operator

$$\mathcal{H}_{\xi}(u)(x) = h_{\xi}(x; u(x)) : L_p(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega), \quad r = \frac{p}{p-2},$$

eine stetige Abbildung.

Die Funktion  $\mathcal{H}_\xi(u)v$  sei nun durch

$$\mathcal{H}_\xi(u)v : x \rightarrow (\mathcal{H}_\xi(u)(x)) \cdot v(x)$$

gegeben. Die *allgemeine Höldersche Ungleichung* lautet

$$\|fg|L_s\| \leq \|f|L_p\| \|g|L_r\|, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r},$$

für  $f \in L_p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , und  $g \in L_r(\Omega)$ ,  $r \geq 1$ . Somit folgt wegen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{p-2}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p'},$$

dass  $\mathcal{H}_\xi(u)v \in L_{p'}(\Omega)$  erfüllt ist, falls  $u, v \in L_p(\Omega)$  und somit  $\mathcal{H}_\xi(u) \in L_r(\Omega)$  gilt.

**Satz 3** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet und  $p > 2$ . Wir setzen voraus, dass die Funktion  $h \in CAR$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert ist und die partielle Ableitung  $h_\xi \in CAR$  ebenfalls auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert ist sowie (13) erfüllt. Ist zusätzlich  $h(x; 0)$  beschränkt, so ist der Nemytskij-Operator*

$$\mathcal{H} : L_p(\Omega) \rightarrow L_{p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

*F-differenzierbar auf  $L_p(\Omega)$  mit dem Differential*

$$\mathcal{H}'(u) : v \rightarrow \mathcal{H}_\xi(u)v, \quad L_p(\Omega) \rightarrow L_{p'}(\Omega).$$

**Beweis:** Integrieren wir (13), so folgt die Existenz von Konstanten  $c, d > 0$ , so dass

$$|h(x; \xi)| \leq c + d|\xi|^{p-1}$$

gilt. Folglich zeigt Satz 2 die Stetigkeit von

$$\mathcal{H} : L_p(\Omega) \rightarrow L_{p'}(\Omega),$$

wobei  $p' = \frac{p}{p-1}$  wie üblich den zu  $p$  konjugierten Exponenten aus der klassische Hölderschen Ungleichung

$$\|fg|L_1\| \leq \|f|L_p\| \|g|L_{p'}\|, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

bezeichnet.

Für  $u, v \in L_p(\Omega)$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= \|\mathcal{H}(u+v) - \mathcal{H}(u) - \mathcal{H}_\xi(u)v|L_{p'}\| \\ &= \left[ \int_{\Omega} |h(x; u(x) + v(x)) - h(x; u(x)) - h_\xi(x; u(x))v(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & |h(x; u(x) + v(x)) - h(x; u(x)) - h_\xi(x; u(x))v(x)| \\ &= |v(x) \int_0^1 [h_\xi(x; u(x) + tv(x)) - h_\xi(x; u(x))] dt| = |v(x)w(x)|, \end{aligned}$$

mit

$$w(x) = \int_0^1 [h_\xi(x; u(x) + tv(x)) - h_\xi(x; u(x))] dt.$$

Verwenden wir jetzt wieder die Höldersche Ungleichung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= \left( \int_\Omega |v(x)w(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \|v\|_{L_p} \cdot \|w\|_{L_r}, \quad r = \frac{p}{p-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|w\|_{L_r}^r &\leq \int_\Omega \left( \int_0^1 |h_\xi(x; u(x) + tv(x)) - h_\xi(x; u(x))|^r dt \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_\Omega |h_\xi(x; u(x) + tv(x)) - h_\xi(x; u(x))|^r dx \right) dt \\ &= \int_0^1 \|h_\xi(u + tv) - h_\xi(u)\|_{L_r}^r dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Da die Abbildung

$$\mathcal{H}_\xi : L_p(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$$

stetig ist, folgt

$$\|\mathcal{H}_\xi(u + tv) - \mathcal{H}_\xi(u)\|_{L_r}^r \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|v\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (16)$$

Nun ergibt sich aus (14), (15) und (16), dass

$$\omega(u, v) = \bar{o}(\|v\|_{L_p})$$

ist.

**Bemerkung 7** Wir weisen darauf hin, dass für  $p = 2$  die Aussage von Satz 3 im allgemeinen **nicht** richtig ist. Man kann unter den angegebenen Voraussetzungen nur zeigen, dass der Nemytskij-Operator G-differenzierbar aber im allgemeinen nicht F-differenzierbar ist.

**Satz 4** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränktes Gebiet. Wir setzen voraus, dass die Funktion  $h \in CAR$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert ist und die partielle Ableitung  $h_\xi \in CAR$  ebenfalls auf  $\Omega \times \mathbb{R}$  definiert ist sowie

$$|h_\xi(x; \xi)| \leq c \quad (17)$$

erfüllt ist. Dann ist der Nemytskij-Operator

$$\mathcal{H} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

$G$ -differenzierbar auf  $L_2(\Omega)$  mit dem Differential

$$\mathcal{H}'_G(u) : v \rightarrow \mathcal{H}_\xi(u)v, \quad L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega).$$

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass für alle  $u, v \in L_2(\Omega)$

$$\left\| \frac{\mathcal{H}(u + tv) - \mathcal{H}(u)}{t} - \mathcal{H}_\xi(u)v \right\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0. \quad (18)$$

Analog zu oben erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{h(x; u(x) + tv(x)) - h(x; u(x))}{t} - h_\xi(x; u(x))v(x) \\ &= v(x) \int_0^1 [h_\xi(x; u(x) + \tau tv(x)) - h_\xi(x; u(x))] d\tau. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\omega_t(x) = \omega_t(u, v)(x) = \int_0^1 [h_\xi(x; u(x) + \tau tv(x)) - h_\xi(x; u(x))] d\tau,$$

so folgt

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\mathcal{H}(u + tv) - \mathcal{H}(u)}{t} - \mathcal{H}_\xi(u)v \right\|_{L_2}^2 = \int_\Omega v^2(x) \omega_t^2(x) \\ & \leq \int_\Omega v^2(x) \int_0^1 |h_\xi(x; u(x) + \tau tv(x)) - h_\xi(x; u(x))| d\tau dx. \end{aligned}$$

Für  $t \rightarrow 0$ , ergibt sich  $\tau tv(x) \rightarrow 0$  fast überall in  $\Omega$  und folglich

$$h_\xi(x; u(x) + \tau tv(x)) - h_\xi(x; u(x)) \rightarrow 0$$

für fast alle  $x \in \Omega$ . Verwenden wir die Voraussetzung, so haben wir

$$|h_\xi(x; u(x) + \tau tv(x)) - h_\xi(x; u(x))|^2 \leq M < \infty$$

und damit nach dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^1 |h_\xi(x; u(x) + \tau tv(x)) - h_\xi(x; u(x))|^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Daraus folgt aber der Satz. ■

Das nächste Ergebnis vervollständigt die obige Aussage.

**Satz 5** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Wir setzen voraus, dass  $h, h_\xi \in CAR$  sowie (17) gilt. Außerdem sei  $\mathcal{H}$  in einem Punkt  $u^* \in L_2(\Omega)$   $F$ -differenzierbar. Dann existieren auf  $\Omega$  messbare Funktionen  $a$  und  $b$  mit*

$$f(x; \xi) = a(x)\xi + b(x).$$

Es existieren dann also nur **lineare** erzeugende Funktionen!

### 3.3 Partielle Ableitungen, Höhere Ableitungen

In Analogie zur klassischen Analysis führen wir jetzt auch *partielle Ableitungen* in allgemeinen Banachräumen ein.

**Definition 5** *Es seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume,  $\mathcal{O} \subset X \times Y$  offen und  $F : \mathcal{O} \rightarrow Z$  mit  $(x, y) \mapsto F(x, y)$ . Es sei  $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ . Für fixiertes  $y_0$  setzen wir  $g(x) = F(x, y_0)$ . Falls  $g$  eine  $F$ -Ableitung in  $x_0$  hat, so definieren wir die partielle Ableitung von  $F$  in  $(x_0, y_0)$  bezüglich der Variable  $x$  durch*

$$F_x(x_0, y_0) = g'(x_0).$$

*Die partielle Ableitung  $F_y(x_0, y_0)$  bezüglich  $y$  wird analog eingeführt.*

Wir geben einige Eigenschaften der partiellen Ableitung an, die in Analogie zur klassischen Analysis bewiesen werden können.

**Proposition 3** (i) *Falls  $F$  in  $(x_0, y_0)$   $F$ -differenzierbar ist, so existieren die partiellen Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  in  $(x_0, y_0)$  und es gilt*

$$F'(x_0, y_0)(x, y) = F_x(x_0, y_0)x + F_y(x_0, y_0)y \quad (19)$$

(ii) *Falls  $F$  die partiellen Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  in einer Umgebung  $U(x_0, y_0)$  besitzt und diese in  $(x_0, y_0)$  stetig sind, dann existiert die  $F$ -Ableitung  $F'(x_0, y_0)$  und es gilt (19).*

(iii) *Die Abbildung  $F$  ist in  $U(x_0, y_0)$  stetig  $F$ -differenzierbar genau dann, wenn alle partielle Ableitungen in  $U(x_0, y_0)$  stetig sind.*

Wir führen jetzt die höheren Ableitungen ein. Es seien wie üblich  $X, Y$  Banachräume und  $\mathcal{O} \subset X$  offen. Weiterhin sei  $F \in C^1(\mathcal{O}, Y)$ . Wir betrachten

$$x \rightarrow F'(x) : \mathcal{O} \subset X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y).$$

$\mathcal{L}(X, Y)$  ist ein Banachraum. Falls  $(F')'$  nach Definition 1 existiert, dann ist

$$(F')'(x) := F''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) =: \mathcal{M}^2(X, Y).$$

Somit erhalten wir

$$F'' : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}^2(X, Y),$$

und allgemein

$$F^{(n)} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{M}^{n-1}(X, Y)) =: \mathcal{M}^n(X, Y), \quad n > 2.$$

Damit wird der Bildraum bei höheren Ableitungen immer komplizierter. Bei Anwendungen ist man jedoch daran interessiert, dass man das Anfangspaar von Banachräumen  $(X, Y)$  beibehält. Das kann man im vorliegenden Fall durch die Verwendung der höheren Differentiale anstelle der höheren Ableitungen erreichen, in dem man diese als  $n$ -linearen beschränkten Operatoren auf dem Banachraum  $X^n$  interpretiert. Dabei wird das  $n$ -te Differential  $d^n F$  durch

$$d^n F(x; h_1, \dots, h_n) = F^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n), \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in X^n,$$

eingeführt. Allgemein gilt folgender Zusammenhang.

**Lemma 6** *Es sei  $n \geq 2$ . Dann ist  $\mathcal{M}^n(X, Y)$  isometrisch-isomorph zu  $\mathcal{L}^n(X, Y)$ , dem Banachraum der stetigen  $n$ -linearen Abbildungen von  $X^n$  in  $Y$ .*

**Beweis:** Wir betrachten hier den Fall  $n = 2$ . Es sei  $\varphi \in \mathcal{M}^2(X, Y) = \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ . Dann definieren wir

$$\varphi \mapsto K\varphi \in \mathcal{L}^2(X, Y) : (K\varphi)(x_1, x_2) = [\varphi(x_1)](x_2), \quad x_1, x_2 \in X.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathcal{M}^2} &= \sup_{\|x_1\|_X \leq 1} \|\varphi(x_1)|_{\mathcal{L}(X, Y)}\| = \sup_{\|x_1\|_X \leq 1} \sup_{\|x_2\|_X \leq 1} \|[\varphi(x_1)](x_2)\|_Y \\ &= \sup_{\|x_1\|_X \leq 1} \sup_{\|x_2\|_X \leq 1} \|K\varphi(x_1, x_2)\|_Y = \|K\varphi\|_{\mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Abbildung  $\varphi \mapsto K\varphi$  isometrisch. Wir müssen noch die Surjektivität zeigen. Es sei also  $\psi \in \mathcal{L}^2(X, Y)$  und  $x_1, x_2 \in X$ . Dann definieren wir für fixiertes  $x_1$  die Abbildung  $[L(x_1)](x_2) := \psi(x_1, x_2)$  und erhalten  $L(x_1) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . ■

Es sei  $\mathcal{O} \subset X$  offen und  $F : \mathcal{O} \rightarrow Y$  zweimal differenzierbar in einer Umgebung von  $x_0 \in \mathcal{O}$ . Wir betrachten jetzt die Abbildung  $x \mapsto F'(x)v = dF(x; v)$  für  $x$  nahe bei  $x_0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} dF(x_0 + w; v) - dF(x_0, v) &= F'(x_0 + w)v - F'(x_0)v = (F''(x_0)w + \bar{o}(\|w\|_X))v \\ &= F''(x_0)(w, v) + \bar{o}(\|w\|_X + \|v\|_X) \\ &= d^2F(x_0; w, v) + \bar{o}(\|w\|_X + \|v\|_X). \end{aligned}$$

**Beispiel 5** Es sei die reellwertige Funktion  $f : U(x_0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der  $n$  reellen Variablen  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  gegeben, die stetige partielle Ableitungen bis einschließlich  $m$ -ter Ordnung in  $U(x_0)$  besitzt. Dann existiert das Differential  $d^k f$  in  $x_0$  für alle  $k = 1, \dots, m$ . Es gilt insbesondere

$$d^2 f(x_0; h_1, h_2) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

wobei  $h_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $h_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  ist. Man beachte insbesondere, dass  $d^2 f(x; h_1, h_2)$  symmetrisch ist. Das gleiche gilt für  $d^k f$  bezüglich  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Beispiel 6** Es sei  $F \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Beispiel 2 zeigt  $F'(x)v = Fv$  für alle  $x \in X$ . Somit folgt aus  $F'(x_0 + w)v = F'(x_0)v$ , dass  $F''(x_0) = 0$  ist.

**Beispiel 7** Es sei für  $X = C^2[0, 1]$  und  $Y = C[0, 1]$  die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  gegeben durch  $F(u) = u'' + u^3$ . Nach Beispiel 3 gilt  $F'(u)v = v'' + 3u^2v$ . Somit erhalten wir

$$d^2 F(u; w, v) = F''(u)(w, v) = 6uvw = F''(u)(v, w) = d^2 F(u; v, w),$$

d.h.  $F''(u)$  ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

Die Abbildung  $F''(x_0)$  kann man als bilineare Abbildung betrachten. Das folgende Ergebnis zeigt, dass  $F''(\cdot)$  symmetrisch ist, und verallgemeinert damit den bekannten *Satz von Schwarz*.

**Proposition 4** *Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $\mathcal{O} \subset X$  offen. Falls  $F \in C^1(\mathcal{O}, Y)$  bei  $x_0 \in \mathcal{O}$  und  $F''(x_0)$  existiert, dann ist  $F''(x_0)$  eine symmetrische bilineare Abbildung, d.h., es gilt*

$$F''(x_0)(h, k) = F''(x_0)(k, h).$$

**Beweis:** Es seien  $h, k \in X$  mit  $h, k \in B(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  genügend klein. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \psi(h, k) &= F(x_0 + h + k) - F(x_0 + h) - F(x_0 + k) + F(x_0), \\ \gamma_h(\xi) &= F(x_0 + h + \xi) - F(x_0 + \xi), \end{aligned}$$

und betrachten für fixiertes  $h$  die Abbildung  $g_h : B(\varepsilon) \rightarrow Y$ ,

$$g_h : k \rightarrow \psi(h, k) - F''(x_0)(h, k) = \gamma_h(k) - \gamma_h(0) - F''(x_0)(h, k).$$

Da  $F$  in  $\mathcal{O}$  differenzierbar ist und  $F''(x_0)(h) : k \rightarrow F''(x_0)(h, k)$  als Abbildung von  $X$  in  $\mathcal{L}(X, Y)$  linear ist, folgt unter Verwendung von Bemerkung 1(iv)

$$\begin{aligned} &\| \psi(h, k) - F''(x_0)(h, k) \|_Y \\ &\leq \sup\{ \| d\gamma_h(tk) - F''(x_0)(h) \| : 0 \leq t \leq 1 \} \| k \|_X \\ &= \sup\{ \| dF(x_0 + h + tk) - dF(x_0 + tk) - F''(x_0)(h) \| : 0 \leq t \leq 1 \} \| k \|_X. \end{aligned} \tag{20}$$

Da  $F$  in  $x_0$  zweimal differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} F'(x_0 + h + tk) &= F'(x_0) + F''(x_0)(h + tk) + \omega(h + tk), \\ F'(x_0 + tk) &= F'(x_0) + F''(x_0)(tk) + \omega(tk) \end{aligned}$$

mit  $\omega(v) = \bar{o}(\|v|X\|)$ . Damit folgt wegen der Linearität der zweiten Ableitung

$$F'(x_0 + h + tk) - F'(x_0 + tk) = F''(x_0)(h) + \omega(h + tk) - \omega(tk). \quad (21)$$

Verwenden wir jetzt (20) und (21) und beachten, dass  $\omega(v) = \bar{o}(\|v|X\|)$  gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\psi(h, k) - F''(x_0)(h, k)|Y\| &\leq \sup\{\|\omega(h + tk) - \omega(tk)|Y\| : 0 \leq t \leq 1\} \|k|X\| \\ &\leq \varepsilon (\|h|X\| + 2\|k|X\|) \|k|X\|, \end{aligned} \quad (22)$$

falls  $\|h|X\|$  und  $\|k|X\|$  hinreichend klein sind.

Vertauschen wir jetzt die Rollen von  $h$  und  $k$  (für  $\|h|X\|$  und  $\|k|X\|$  hinreichend klein), so folgt analog

$$\begin{aligned} \|\psi(k, h) - F''(x_0)(k, h)|Y\| &\leq \sup\{\|\omega(k + th) - \omega(th)\| : 0 \leq t \leq 1\} \|h|X\| \\ &\leq \varepsilon (\|k|X\| + 2\|h|X\|) \|h|X\|. \end{aligned} \quad (23)$$

Da  $\psi(h, k) = \psi(k, h)$  nach Konstruktion gilt, erhalten wir aus (22) und (23) schließlich

$$\begin{aligned} \|F''(x_0)(h, k) - F''(x_0)(k, h)\| &\leq \varepsilon (2\|k|X\|^2 + 2\|h|X\|^2 + 2\|h|X\| \|k|X\|) \\ &\leq 3\varepsilon (\|k|X\|^2 + \|h|X\|^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Wir haben die Ungleichung (24) für  $\|h|X\|$  und  $\|k|X\|$  hinreichend klein bewiesen. Aber sie gilt auch für beliebige  $\|h|X\|$  und  $\|k|X\|$ , da  $F''(x_0)(h, k)$  homogen vom Grad 2 ist. Da  $\varepsilon > 0$  in (24) beliebig ist, folgt somit

$$F''(x_0)(h, k) = F''(x_0)(k, h)$$

für alle  $h, k \in X$ . ■

**Bemerkung 8** In Analogie kann man natürlich auch die höheren partiellen Ableitungen einführen.

Wir verwenden jetzt in Übereinstimmung mit früheren Definitionen folgende Bezeichnungen.

**Definition 6** Es sei  $F : \mathcal{O} \subset X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen den Banachräumen  $X$  und  $Y$  und  $r \in \mathbb{N}$ .

Dann ist  $F$  eine  $C^r$ -Abbildung,  $F \in C^r(\mathcal{O}, Y)$ , falls  $F$  stetige  $F$ -Ableitungen bis zur Ordnung  $r$  in der offenen Menge  $\mathcal{O}$  hat. Wir definieren insbesondere

$$C^0(\mathcal{O}, Y) = C(\mathcal{O}, Y) = \{F : \mathcal{O} \rightarrow Y \text{ ist stetig}\}, \quad C^\infty(\mathcal{O}, Y) = \bigcap_{r \geq 0} C^r(\mathcal{O}, Y).$$

Wir setzen jetzt Einfachheit halber

$$F^{(n)}(x)h^n = F^{(n)}(x)(h, \dots, h) = d^n F(x; h) = d^n F(x; h, \dots, h).$$

In Verallgemeinerung der klassischen *Taylor'schen Formel* betrachten wir nun

$$F(x+h) = F(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x)h^k + R_n. \quad (25)$$

Hierbei ist  $n = 1, 2, \dots$ .

**Satz 6 (Verallgemeinerter Satz von Taylor)** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $U(x) \subset X$  eine offene und konvexe Umgebung von  $x$  und  $F \in C^n(U, Y)$ .*

*Dann gilt (25) mit der Abschätzung*

$$\|R_n|Y\| \leq \frac{1}{n!} \sup_{0 < \tau < 1} \|F^{(n)}(x + \tau h)h^n|Y\|.$$

**Beweis:** Wir setzen  $\gamma(t) = x + th$ ,  $t \in [0, 1]$ . Dann sei  $\Phi : [0, 1] \rightarrow Y$  durch

$$\Phi(t) = F(\gamma(t)) = F(x + th)$$

definiert. Mittels Kettenregel, siehe Proposition 2(ii), erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= F'(x + th)h, \\ \Phi''(t) &= F''(x + th)h^2, \end{aligned}$$

bis

$$\Phi^{(n)}(t) = F^{(n)}(x + th)h^n.$$

Unter Verwendung der klassischen Analysis folgt wegen

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \Phi^{(n-1)}(0) + R_n$$

die Aussage. ■

## 4 Lokale Inversionssätze

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der lokalen Invertierbarkeit von Abbildungen zwischen Banachräumen. Dabei verallgemeinern wir bestimmte Resultate, die vom  $\mathbb{R}^n$  bekannt sind.

### 4.1 Isomorphismen

Es sei  $X$  ein Banachraum. Wie üblich wird durch  $\bar{B}(x, r) \subset X$  die abgeschlossene Kugel vom Radius  $r$  um  $x \in X$  bezeichnet.

Wir beginnen mit *kontraktiven Abbildungen*.

**Lemma 1 (Fixpunktsatz von Banach)** *Der Operator  $A$  bilde  $\bar{B}(x, r) \subset X$  in sich ab und erfülle folgende Kontraktions-Bedingung für alle  $y, z \in \bar{B}(x, r)$*

$$\|Ay - Az\|_X \leq K \|y - z\|_X, \quad (1)$$

wobei für die Konstante  $K$  die Abschätzung  $0 \leq K < 1$  gilt. Dann hat  $A$  genau einen Fixpunkt  $x_\infty$  in  $\bar{B}(x, r)$ , und  $x_\infty$  ist der Grenzwert der Folge

$$x_n = A^n x_0$$

für beliebigen Startwert  $x_0 \in \bar{B}(x, r)$ .

**Beweis:**

Es sei  $x_0 \in \bar{B}(x, r)$  beliebig gewählt. Wir zeigen, dass durch  $x_n = A^n x_0$  eine Cauchy-Folge definiert ist. Es seien  $n, p \in \mathbb{N}$ . Dann gilt durch Vergleich mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\|_X &= \|A^{n+p}x_0 - A^n x_0\|_X \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \|A^{j+1}x_0 - A^j x_0\|_X \\ &= \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} K^j \|Ax_0 - x_0\|_X \leq \frac{K^n}{1-K} \|Ax_0 - x_0\|_X. \end{aligned} \quad (2)$$

Folglich erhält man für  $n \rightarrow \infty$ , unabhängig von  $p \in \mathbb{N}$ , dass  $\|x_{n+p} - x_n\|_X \rightarrow 0$ . Somit haben wir eine Cauchy-Folge im Banachraum  $X$ . Da die Kugel  $\bar{B}(x, r)$  bezüglich  $\|\cdot\|_X$  abgeschlossen ist, existiert  $x_\infty \in \bar{B}(x, r)$  mit  $x_n \rightarrow x_\infty$ . Aus der Stetigkeit von  $A$  folgt somit

$$Ax_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_\infty, \quad (3)$$

d.h.,  $x_\infty$  ist ein Fixpunkt von  $A$ . Dieser ist eindeutig, da aus

$$\|x_\infty - y_\infty\|_X = \|Ax_\infty - Ay_\infty\|_X \leq K \|x_\infty - y_\infty\|_X$$

stets  $x_\infty = y_\infty$  folgt. ■

Wir verallgemeinern Lemma 1 für Abbildungen  $A$ , die außerdem von einem Parameter  $\beta$  abhängen.

**Lemma 2 (Parameterabhängiger Fixpunktsatz)** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $\bar{B}(x_0, r) \subset X$ . Weiterhin sei  $A(x, \beta)$  eine stetige Abbildung von  $\bar{B}(x_0, r) \times Y \rightarrow \bar{B}(x_0, r)$ , so dass  $A(x, \beta)$  die Bedingung (1) für alle  $\beta \in Y$  erfüllt. Dann ist die Abbildung  $g: \beta \rightarrow x_\beta$ , wobei  $x_\beta$  der eindeutige Fixpunkt von  $x = A(x, \beta)$  nach Lemma 1 ist, eine stetige Abbildung von  $Y$  in  $X$ .*

**Beweis:** Es gelte  $\beta_n \rightarrow \beta_0$  in  $Y$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie

$$g(\beta_n) = x_{\beta_n} = A(x_{\beta_n}, \beta_n),$$

$$g(\beta_0) = x_{\beta_0} = A(x_{\beta_0}, \beta_0).$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \|g(\beta_n) - g(\beta_0)|X\| &= \|A(x_{\beta_n}, \beta_n) - A(x_{\beta_0}, \beta_0)|X\| \\ &\leq \|A(x_{\beta_n}, \beta_n) - A(x_{\beta_0}, \beta_n)|X\| + \|A(x_{\beta_0}, \beta_n) - A(x_{\beta_0}, \beta_0)|X\| \\ &\leq K\|x_{\beta_n} - x_{\beta_0}|X\| + \|A(x_{\beta_0}, \beta_n) - A(x_{\beta_0}, \beta_0)|X\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen  $g(\beta_n) = x_{\beta_n}$  und  $g(\beta_0) = x_{\beta_0}$

$$\|g(\beta_n) - g(\beta_0)|X\| \leq \frac{1}{1-K} \|A(x_{\beta_0}, \beta_n) - A(x_{\beta_0}, \beta_0)|X\| \leq c\|\beta_n - \beta_0|Y\| \rightarrow 0,$$

da  $A$  stetig in  $\beta$  ist. ■

Weiterhin bilden die Isomorphismen von einem Banachraum  $X$  auf einen Banachraum  $Y$  eine offene Menge in  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Dabei heißt  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  invertierbar, falls ein  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  existiert mit

$$B \circ A = \text{id}_X$$

$$A \circ B = \text{id}_Y.$$

Die Abbildung  $B$  wird dann durch  $A^{-1}$  bezeichnet. Weiterhin sei

$$\text{Iso}(X, Y) = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) : A \text{ ist invertierbar.}\}$$

Nach dem *Satz vom abgeschlossenen Graphen* folgt aus den Eigenschaften  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $A$  ist injektiv und  $R(A) = Y$ , dass  $A \in \text{Iso}(X, Y)$  gilt.

**Lemma 3** *Es seien  $X, Y$  Banachräume, und  $T$  ein Isomorphismus von  $X$  auf  $Y$ . Dann existiert ein  $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$ , so dass für alle linearen Abbildungen  $S : X \rightarrow Y$  mit  $\|S\| < \varepsilon$  auch  $T - S$  ein Isomorphismus ist.*

**Beweis:** Wegen  $T - S = T(\text{id}_X - T^{-1}S)$  genügt es zu zeigen, dass  $\text{id}_X - T^{-1}S$  invertierbar ist. Es lässt sich jedoch leicht nachprüfen, dass der inverse Operator von  $\text{id}_X - T^{-1}S$  durch

$$\text{id}_X + T^{-1}S + (T^{-1}S)^2 + (T^{-1}S)^3 + \dots$$

gegeben ist, da für diese Reihe

$$1 + \|T^{-1}S\| + \|T^{-1}S\|^2 + \|T^{-1}S\|^3 + \dots$$

eine Majorante ist, und die letzte Reihe für  $\|S\| < 1/\|T^{-1}\|$  konvergiert. ■

## 4.2 Satz über implizite Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die im allgemeinen nichtlineare Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{4}$$

lokal lösen. Es seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume. Wir setzen voraus, dass

$$F : X \times Y \rightarrow Z$$

gilt, und der Punkt  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  eine Lösung von (4) ist. Wir sind jetzt daran interessiert, eine eindeutige Abbildung

$$x \mapsto y$$

für  $x$  nahe bei  $x_0$  zu finden, so dass  $y(x_0) = y_0$  und  $F(x, y(x)) = 0$  gilt. Dabei wird es sich zeigen, dass die entscheidende Bedingung für die Existenz einer derartigen eindeutigen Abbildung darin besteht, dass der stetige lineare Operator

$$F_y(x_0, y_0)^{-1} : Z \rightarrow Y \tag{5}$$

existiert. Das ist jedoch äquivalent zur Forderung, dass die partielle Ableitung

$$F_y(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z \tag{6}$$

bijektiv ist. Damit kann man die zu (4) äquivalente Form

$$y - y_0 = (y - y_0) - F_y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y) \tag{7}$$

verwenden.

Wir betrachten das obige Problem (4) zunächst im Rahmen der *klassischen Analysis*. Dann gilt nach dem Satz von Taylor für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \text{höhere Terme.}$$

Da nach Voraussetzung  $F(x_0, y_0) = 0$  gilt, ist somit die Gleichung  $F(x, y) = 0$  für  $x, y \in \mathbb{R}$  äquivalent zu

$$y - y_0 = -F_y(x_0, y_0)^{-1}F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \text{höhere Terme.}$$

Das stimmt somit im klassischen Fall unter Verwendung der Taylorentwicklung von  $F(x, y)$  mit der Gleichung (7) überein. Dabei ist jedoch die Bedingung (5) entscheidend. Somit ist die rechte Seite von (7) bezüglich des kleinen Parameters  $(x - x_0)$  von *erster* Ordnung, d.h. *linear*, und bezüglich  $(y - y_0)$  von *zweiter* Ordnung abhängig. Folglich bietet es sich an, den Banachschen Fixpunktsatz zur *iterativen* Lösung von (4) zu verwenden.

Wir beweisen jetzt die Verallgemeinerung des Satzes über impliziten Funktionen im Banachraum-Fall. Dieses Resultat liefert uns dann die Grundlage für die Verwendung der Linearisierungsmethode bei der Lösung nichtlinearer Probleme, die einen Parameter enthalten. Der Beweis verläuft im wesentlichen analog zum klassischen Fall.

**Satz 1 (Satz über implizite Funktionen)** *Es sei  $F : U(x_0, y_0) \subset X \times Y \rightarrow Z$  in  $(x_0, y_0)$  stetig und es gelte  $F(x_0, y_0) = 0$ . Weiterhin existiert die partielle Ableitung  $F_y$  in  $U(x_0, y_0)$ , die in  $(x_0, y_0)$  ebenfalls stetig ist und (6) erfüllt. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i) (Existenz und Unität) *Es existieren positive Zahlen  $r_0$  und  $r$ , so dass für alle  $x \in X$  mit  $\|x - x_0\|_X \leq r_0$  genau ein  $y = y(x) \in Y$  existiert mit  $\|y(x) - y_0\|_Y \leq r$  und  $F(x, y(x)) = 0$ .*
- (ii) (Konstruktion der Lösung) *Die durch sukzessive Approximation definierte Folge  $\{y_n(x)\}_{n=0}^\infty$  mit  $y_0(x) = y_0$  und*

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - F_y(x_0, y_0)^{-1}F(x, y_n(x))$$

*konvergiert gegen  $y(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Diese Aussage gilt für alle  $x \in X$  mit  $\|x - x_0\|_X \leq r_0$ .*

- (iii) (Stetigkeit) *Falls  $F$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  stetig ist, so ist auch  $y(\cdot)$  in einer Umgebung von  $x_0$  stetig.*

- (iv) (Differenzierbarkeit) *Es sei  $1 \leq m \leq \infty$ . Falls  $F$  eine  $C^m$ -Abbildung in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  ist, so ist auch  $y(\cdot)$  eine  $C^m$ -Abbildung in einer Umgebung von  $x_0$ .*

**Beispiel 1** Wir wollen zunächst zeigen, dass die Bedingung (6) für die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung notwendig ist. Es sei für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$F(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2.$$

Dann gilt  $F(x_0, y_0) = 0$  und die Gleichung  $F(x, y) = 0$  hat die Lösungen

$$y(x) = y_0 \pm (x - x_0),$$

d.h.  $(x_0, y_0)$  ist ein Bifurkationspunkt. In diesem Fall ist wegen  $F_y(x_0, y_0) = 0$  die Bedingung (6) nicht erfüllt.

**Beweis:** 1. Schritt

Wir beweisen (i) und (ii). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Wir definieren nun  $g : U(0, 0) \subset X \times Y \rightarrow Z$  durch

$$g(x, y) = F_y(0, 0)y - F(x, y).$$

Somit ist die Gleichung  $F(x, y) = 0$  äquivalent zur Gleichung

$$y = F_y(0, 0)^{-1}g(x, y) = y - F_y(0, 0)^{-1}F(x, y) =: T(x)y, \quad (8)$$

die mit (7) für  $y_0 = 0$  übereinstimmt. Wir untersuchen jetzt die Eigenschaften des Operators  $T(x)$ , d.h., wir wollen nachweisen, dass alle Bedingungen für die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

Es sei  $\|x|X\| \leq r_0$  sowie  $\|y|Y\| \leq r$  und  $\|z|Y\| \leq r$ . Es gilt  $g_y(x, y) = F_y(0, 0) - F_y(x, y)$  und somit  $g_y(0, 0) = 0$ . Nach Voraussetzung sind  $F$  und  $F_y$  in  $(0, 0)$  stetig. Damit ergibt sich nach dem Satz von Taylor (Satz 6 im Abschnitt 3.3), dass

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - g(x, z)|Z\| &\leq \sup_{0 < \tau < 1} \|g_y(x, z + \tau(y - z))\| \|y - z|Y\| \\ &= \bar{o}(1) \|y - z|Y\|, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da  $g(0, 0) = 0$  und  $g$  stetig in  $(0, 0)$  ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|g(x, y)|Z\| &\leq \|g(x, y) - g(x, 0)|Z\| + \|g(x, 0)|Z\| \\ &= \bar{o}(1) \|y|Y\| + \bar{o}(1), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Falls  $M = \{y \in Y : \|y|Y\| \leq r\}$ , dann gelten für hinreichend kleine  $r, r_0$  die Abschätzungen

$$\|T(x)y|Y\| \leq r, \quad \|T(x)y - T(x)z|Y\| \leq \frac{1}{2}\|y - z|Y\|,$$

d.h. wir können in Lemma 1 die Konstante  $K = 1/2$  wählen, falls  $y, z \in M$  für beliebiges fixierte  $x \in X$  mit  $\|x|X\| \leq r_0$ . Das folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \|T(x)y|Y\| &\leq \|F_y(0,0)^{-1}\| \|g(x,y)|Z\|, \\ \|T(x)y - T(x)z|Y\| &\leq \bar{o}(1)\|F_y(0,0)^{-1}\| \|y - z|Y\|. \end{aligned}$$

Jetzt folgen die Aussagen (i) und (ii) unmittelbar aus dem Banachschen Fixpunktsatz, siehe Lemma 1.

2. *Schritt* Wir zeigen (iii). Die Abbildung

$$(x, y) \mapsto T(x)y$$

ist in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  stetig. Aus dem parameterabhängigen Fixpunktsatz (siehe Lemma 2) folgt damit die Stetigkeit der Lösung  $y = y(x)$ .

3. *Schritt* Wir betrachten (iv).

Falls  $m = 1$  ist, so erhalten wir mit Proposition 3/3(i)

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + th, y(x + th)) - F(x, y(x)) \\ &= F_x(x, y(x))th + F_y(x, y(x))[y(x + th) - y(x)] + \bar{o}(t), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

und somit

$$y(x + th) - y(x) = -tF_y(x, y(x))^{-1}F_x(x, y(x))h + \bar{o}(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Somit existiert die  $G$ -Ableitung  $y'_G(x)$  mit

$$y'_G(x)h = -F_y(x, y(x))^{-1}F_x(x, y(x))h. \quad (9)$$

Nach Voraussetzung ist  $F_y(x, y(x))^{-1} \in \mathcal{L}(Y, Z)$  für  $x$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $x_0$ , da  $F_y(x_0, y_0)^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$  und  $y(\cdot)$  stetig sind. Aus der Stetigkeit von  $F'$  folgt mit Proposition 3/3(iii) die Stetigkeit von  $F_x$  und  $F_y$  in einer geeigneten Umgebung von  $(x_0, y_0)$ . Somit ist die  $G$ -Ableitung  $y'_G$  stetig und ist damit nach Proposition 3/1(iii) auch die  $F$ -Ableitung. Durch Iteration zeigt man den allgemeinen Fall  $m \geq 2$ . ■

**Bemerkung 1** Nach (9) gilt also

$$y'(x) = -F_y(x, y(x))^{-1}F_x(x, y(x)).$$

Das ist die Verallgemeinerung der bekannten Beziehung aus dem  $\mathbb{R}^2$ .

**Beispiel 2** Wir behandeln die Lösbarkeit eines endlichen Systems von reellen Gleichungen. Es sei  $x = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in \mathbb{R}^M$  und  $y = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$ . Wir nehmen auf  $\mathbb{R}^K$ ,  $K = N, M$ , die Maximum-Norm, d.h.

$$\|z\|_{\mathbb{R}^K} = \max_{i=1, \dots, K} |\zeta_i|$$

für  $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_K)$  und betrachten das System von  $N$  Gleichungen

$$F(x, y) = 0 \tag{10}$$

gegeben durch

$$f_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R}^M, \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

mit  $F : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

Falls  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (10) ist, und alle  $f_j$  und alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial \eta_k}$ ,  $j, k = 1, \dots, N$ , stetig auf einer offenen Umgebung  $U(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$  sind und die Jacobi-Determinante nicht Null ist, d.h.,

$$\det \left( \frac{\partial f_j}{\partial \eta_k}(x_0, y_0) \right) \neq 0, \quad j, k = 1, \dots, N, \tag{11}$$

dann existieren Zahlen  $r_0, r > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^M$  mit  $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^M} \leq r_0$  genau eine Lösung  $y = y(x) \in \mathbb{R}^N$  mit  $\|y - y_0\|_{\mathbb{R}^N} \leq r$ , so dass  $F(x, y(x)) = 0$  gilt.

Außerdem ist die Abbildung  $y(x)$  stetig, und falls alle Funktionen  $f_j$   $C^m$ -Abbildungen in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  sind, so ist auch die Abbildung  $y(x)$  eine  $C^m$ -Abbildungen in einer Umgebung von  $x_0$ .

Diese Aussage folgt unter Verwendung von Satz 1, wenn man beachtet, dass

$$F_y(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial \eta_k} \right) (x_0, y_0)$$

die entsprechende *Jacobi-Matrix* ist.

### 4.3 Diffeomorphismen und ein lokaler Inversionssatz

In diesem Abschnitt betrachten wir Resultate, die sich aus dem Satz über implizite Funktionen ableiten lassen. Dabei untersuchen wir für eine gegebene Funktion  $F$  die Gleichung

$$F(G(y)) = y. \tag{12}$$

Falls man diese Gleichung bezüglich der Funktion  $G$  lösen will, so entspricht das der Bestimmung der inversen Funktion  $G = F^{-1}$  zu  $F$  bzw. der Variablentransformation  $x = G(y)$ . Für die Resultate, die mit dem Inversionssatz zusammenhängen, führen wir folgende Begriffe ein.

**Definition 1** Es seien  $M_X$  und  $M_Y$  beliebige offene Teilmengen der Banachräume  $X$  bzw.  $Y$ . Weiterhin sei  $r \in \mathbb{N}_0$ .

(i) Die Abbildung  $F : M_X \rightarrow M_Y$  heißt  $C^r$ -Diffeomorphismus, falls  $F$  bijektiv ist und sowohl  $F$  als auch  $F^{-1}$   $C^r$ -Abbildungen sind.

(ii)  $F$  ist ein lokaler  $C^r$ -Diffeomorphismus bei  $x_0 \in X$ , falls  $F$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus von einer Umgebung  $U(x_0)$  auf eine Umgebung  $U(F(x_0)) \subset Y$  ist.

In Analogie zum  $n$ -dimensionalen Fall gilt ebenfalls ein *lokaler Inversionsatz*. Dieser Satz gibt eine erste Antwort auf die Verwendung der Linearisierungsmethode zur Lösung nichtlinearer Probleme.

**Satz 2 (Lokaler Inversionssatz)** Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $x_0 \in X$ . Dann ist  $F \in C^1(U(x_0), Y)$  ein lokaler  $C^1$ -Diffeomorphismus in  $x_0$  genau dann, wenn  $F'(x_0) \in \text{Iso}(X, Y)$  gilt.

**Korollar 1 (Differentiationsregel für inverse Abbildungen)** Es sei  $r \in \mathbb{N}$ . Weiterhin gelte  $F \in C^r(U(x_0), Y)$  und  $F'(x_0) \in \text{Iso}(X, Y)$ . Dann ist  $F$  ein lokaler  $C^r$ -Diffeomorphismus. Insbesondere gilt

$$(F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}, \quad y = F(x). \quad (13)$$

**Beweis:** 1. Schritt  $\Leftarrow$  Es sei  $F'(x_0) : X \rightarrow Y$  bijektiv und  $y_0 = F(x_0)$ . Dann setzen wir

$$H(x, y) = y - F(x).$$

Nun kann man die Gleichung  $H(x, y) = 0$  nach dem Satz über implizite Funktionen, siehe Satz 1, in der Form  $x = x(y)$  lösen, da in unserem Fall  $H_x(x_0, y_0) = F'(x_0)$  bijektiv ist. Damit erhalten wir für die Lösung  $x = x(y)$  von  $0 = H(x(y), y) = y - F(x(y))$ , dass  $x(y) = F^{-1}(y)$  gilt. Setzen wir  $G(y) = F^{-1}(y)$ , so folgt

$$F(G(y)) = y, \quad G(F(x)) = x. \quad (14)$$

Differenzieren wir (14) nach der Kettenregel, siehe Proposition 2(iii) im Abschnitt 3.1, so folgt

$$F'(G(y))G'(y) = I_Y, \quad G'(F(x))F'(x) = I_X.$$

Mit  $y = F(x)$  und  $x = G(y)$  ergibt sich hieraus

$$F'(x)G'(y) = I_Y, \quad G'(y)F'(x) = I_X.$$

Daraus folgt sowohl (13) als auch die Aussage, dass  $F$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, falls  $F'(x_0) : X \rightarrow Y$  bijektiv ist.

2. Schritt  $\Rightarrow$  Es gelte  $F(G(y_0)) = y_0$  mit  $y_0 = F(x_0)$  und  $G(F(x_0)) = x_0$  mit  $x_0 = G(y_0)$ . Falls  $F$  lokal invertierbar in  $x_0$  ist und  $F$  und  $G = F^{-1}$  in  $x_0$  bzw. in  $y_0$  differenzierbar sind, so folgt mit Kettenregel

$$F'(x_0) \circ G'(y_0) = I_Y, \quad G'(y_0) \circ F'(x_0) = I_X,$$

dass  $F'(x_0) \in \text{Iso}(X, Y)$  und  $G'(y_0) \in \text{Iso}(Y, X)$  gilt. Die Aussage für  $r > 1$  folgt durch Induktion. ■

**Bemerkung 2** Man beachte, dass die Bedingung  $F \in C^1$  nicht abgeschwächt werden kann. Falls  $X$  und  $Y$  endlich-dimensional sind, so kann man Beispiele konstruieren, wo die Injektivität verletzt wird.

Es sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-fallende Funktion, so dass

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{1}{n} : & \text{für } \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq s \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} \\ s + \underline{o}(s^2) : & \text{für } s \rightarrow 0 \end{cases}$$

$\varphi$  kann so gewählt werden, dass die Funktion beliebig oft in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar ist. Weiterhin gilt  $\varphi'(0) = 1$ , aber  $\varphi$  ist nicht injektiv in jeder Umgebung von 0.

Unter Verwendung dieser Funktion kann man im unendlich-dimensionalen Fall auch ein Beispiel konstruieren, dass nicht surjektiv ist.

Es sei  $X = Y = C[-1, 1]$  und  $F : X \rightarrow Y$  ist durch  $F(u) = \varphi(u)$  definiert. Wir betrachten jetzt die Folge in  $Y$ , die durch

$$v_n(t) = \frac{1}{n} + \frac{t}{n^2}$$

gegeben ist. Für diese Folge gilt  $\|v_n|_Y\| \rightarrow 0$  und  $v_n \notin R(F)$ .

Falls ein  $u_n \in X$  mit  $F(u_n) = v_n$  existiert, so gilt

$$\varphi(u_n(t)) = v_n(t) = \frac{1}{n} + \frac{t}{n^2}.$$

Daraus folgt

$$\varphi(u_n(t)) > \frac{1}{n}, \quad t > 0$$

und

$$\varphi(u_n(t)) < \frac{1}{n}, \quad t < 0.$$

Die Monotonie von  $\varphi$  zeigt, dass

$$u_n(t) \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}, \quad t > 0,$$

und

$$u_n(t) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}, \quad t < 0.$$

Somit ist  $u_n(t)$  in  $t = 0$  unstetig, d.h.,  $u_n \notin X$ . Wir bemerken, dass  $F$  zwar in 0 differenzierbar ist mit  $F'(0) = I_X$ , aber  $F \notin C^1(X, Y)$ .

**Bemerkung 3** Der lokale Inversionssatz liefert in der nichtlinearen Analysis die mathematische Grundlage für die Anwendung der *Linearisationsmethode*, die im wesentlichen darin besteht, eine nichtlineare Aufgabe durch die Untersuchung eines approximierenden linearen Problems zu lösen.

**Beispiel 3** Wir suchen die  $T$ -periodische Lösung  $x = x(t)$  der Differentialgleichung

$$x''(t) + g(x(t), x'(t)) = \varepsilon h(t), \quad (15)$$

wobei  $g \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  eine vorgegebene  $T$ -periodische Funktion ist.

Wir verwenden die Banachräume

$$X = \{x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t+T) = x(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\},$$

$$Y = \{h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : h(t+T) = h(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

sowie

$$F(x) = x'' + g(x, x').$$

Wir setzen weiter voraus, dass  $g(0, 0) = 0$  erfüllt ist. Somit ist  $x = 0$  die triviale Lösung von (15), falls  $\varepsilon = 0$  gilt.

Wir verwenden Satz 2 mit  $x = 0$ . Wir erhalten  $F \in C^1(X, Y)$  mit

$$F'(0)w = w'' + g_{x'}(0, 0)w' + g_x(0, 0)w.$$

Unter Verwendung des Fredholmschen Alternativsatzes, siehe Satz 10 im Abschnitt 2.4, ergibt sich, dass  $F'(0)$  invertierbar ist, falls die lineare Gleichung

$$w'' + g_{x'}(0, 0)w' + g_x(0, 0)w$$

nur die triviale Lösung  $w = 0$  besitzt. Falls das erfüllt ist, so existieren  $\varepsilon^* > 0$  und  $\delta > 0$ , so dass für  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$  die Gleichung (15) eine eindeutige Lösung  $x$  mit  $\|x|X\| < \delta$  hat.

**Beispiel 4** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glattes und beschränktes Gebiet. Wir betrachten das *semilineare Randwertproblem*

$$\Delta u + \lambda u - u^3 = h \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad (16)$$

wobei  $\lambda$  ein reeller Parameter ist. In diesem Falle wählen wir

$$X = \{u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

sowie

$$Y = \{h \in C^\alpha(\overline{\Omega})\}.$$

Die durch (16) definierte Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  ist dann

$$F(u) = \Delta u + \lambda u - u^3.$$

Wir verwenden Satz 2 mit  $u = 0$  und  $F(0) = 0$ . Offensichtlich ist  $F \in C^\infty(X, Y)$ , und es gilt

$$F'(u)w = \Delta w + \lambda w - 3u^2w.$$

Falls  $\lambda \neq \lambda_k$ , d.h.,  $\lambda$  ist kein Eigenwert von

$$F'(0)w = \Delta w + \lambda w = 0, \quad w \in X,$$

so ist nach dem Fredholmschen Alternativsatz  $F'(0)$  eine eindeutige Abbildung von  $X$  auf  $Y$ .

Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen existiert somit  $F'(0)^{-1}$  und ist ebenfalls stetig.

Damit gilt folgende Aussage:

Falls  $\lambda \neq \lambda_k$  gilt, so besitzt (16) für alle  $h \in Y$  mit  $\|h\|_Y$  hinreichend klein eine eindeutige Lösung  $u = u(h) \in X$ . Die Zuordnung  $F^{-1} : h \rightarrow u(h)$  ist dabei  $C^\infty$ .

## 5 Globale Inversionssätze

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der globalen Ausdehnung der bisher erzielten Resultate über die lokale Invertierbarkeit. Zunächst beweisen wir den *globalen Inversionssatz* (*Monodromiesatz*), der für den endlich-dimensionalen Fall auf Ergebnisse von Hadamard zurückgeht und durch Caccioppoli und P. Levy in den 30er Jahren auf Banachräume ausgedehnt wurde. Anschließend untersuchen wir Abbildungen, die Singularitäten haben und somit nicht globale Diffeomorphismen sind. Wir wenden diese Resultate dann im Rahmen der Theorie von Ambrosetti–Prodi an.

### 5.1 Der globale Inversionssatz

Wir sind jetzt an den Eigenschaften interessiert, die eine Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  besitzen muss, so dass  $F$  einen globalen Diffeomorphismus zwischen den Banachräumen  $X$  und  $Y$  darstellt.

Dabei sind insbesondere topologische Bedingungen von Bedeutung.

Falls  $B \subset Y$ , so bezeichnen wir mit

$$F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \in B\}$$

das Urbild von  $B$  bezüglich der Abbildung  $F$ . Insbesondere schreiben wir  $F^{-1}(y) := F^{-1}(\{y\})$  für das Urbild von  $y \in Y$ .

Für die Charakterisierung der zulässigen Abbildungen ist besonders der Begriff der *eigentlichen Abbildung* (englisch: *proper*) von großer Bedeutung.

Wir erinnern daran, dass eine Menge  $M \subset X$  *kompakt* ist, falls jede Folge  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset M$  eine konvergente Teilfolge enthält ( $M$  ist präkompakt) und  $M$  abgeschlossen ist. Insbesondere ist jede kompakte Menge beschränkt.

**Definition 1** *Eine Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  ist eigentlich, falls aus der Kompaktheit einer Menge  $K \subset Y$  im Banachraum  $Y$  stets die Kompaktheit des Urbild  $F^{-1}(K) \subset X$  im Banachraum  $X$  folgt.*

Wir geben zunächst einige Klassen von eigentlichen Abbildungen an. Weitere Beispiele, die in engem Zusammenhang zu semilinearen elliptischen Randwertproblemen stehen, behandeln wir im nächsten Abschnitt.

**Beispiel 1** (i) Falls  $F : X \rightarrow Y$  einen stetigen inversen Operator besitzt, so ist  $F$  eigentlich.  
(ii) Falls  $X$  und  $Y$  endlich-dimensionale Banachräume sind, so ist  $F \in C(X, Y)$  eigentlich genau dann, wenn  $F$  *koerzitiv* ist, d.h.

$$\|F(x)|Y\| \rightarrow \infty \quad \text{falls} \quad \|x|X\| \rightarrow \infty.$$

**Beweis:** Hierbei verwenden wir, dass jede beschränkte Menge in einem Banachraum genau dann präkompakt ist, wenn der Banachraum endlich-dimensional ist.

Falls  $F$  eigentlich ist, so ist das Urbild jeder beschränkten Teilmenge von  $Y$  beschränkt in  $X$ . Somit ist  $F$  eine koerzitive Abbildung. Falls umgekehrt  $F$  koerzitiv und  $K \subset Y$  kompakt ist, so ist  $F^{-1}(K)$  beschränkt und damit präkompakt in  $X$ . Wegen der Stetigkeit von  $F$  ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Folglich ist  $F^{-1}(K)$  kompakt. ■

(iii) Für eine spezielle Klasse von Abbildungen  $F \in C(X, Y)$  folgt aus der Koerzitivität ebenfalls im *unendlich-dimensionalen* Fall, dass  $F$  eigentlich ist.

Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $F \in C(X, Y)$  koerzitiv. Dann ist  $F$  eine eigentliche Abbildung,

falls  $F$  als kompakte Störung einer eigentlichen Abbildung darstellbar ist, d.h., es existiert eine Darstellung der Form

$$F = F_0 + F_1,$$

wobei  $F_0 \in C(X, Y)$  eigentlich und  $F_1 \in C(X, Y)$  kompakt, also *vollstetig* ist.

**Beweis:** Es sei  $K \subset Y$  eine kompakte Menge, und es gelte  $y_n = F(x_n) \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $y_n \rightarrow y$  in  $K$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir müssen also zeigen, dass

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

eine konvergente Teilfolge hat mit  $x_{n_j} \rightarrow x$  für  $j \rightarrow \infty$  und  $F(x) = y$ . Wegen der Koerzitivität von  $F$  folgt, dass  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  beschränkt ist. Da  $F_1$  kompakt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\{F_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$  konvergent ist, d.h.,  $F_1(x_n) \rightarrow z$  für  $n \rightarrow \infty$  (sonst Übergang zu einer Teilfolge). Damit ist auch  $\{F_0(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$  konvergent. Jetzt folgt aus der Tatsache, dass  $F_0$  eigentlich ist, die Existenz einer konvergenten Teilfolge  $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$  von  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  mit  $x_{n_j} \rightarrow x$  für  $j \rightarrow \infty$ . Schließlich zeigt die Stetigkeit von  $F$ , dass  $F(x) = y$  in  $Y$  gilt und somit  $F$  eigentlich ist. ■

(iv) Insbesondere ist  $F = \text{id}_X - C$  eine eigentliche Abbildung in  $X$ , falls  $C : X \rightarrow X$  vollstetig (stetig und kompakt) ist. Diese Aussage wird in der nichtlinearen Analysis zur Einführung des Leray–Schauder–Abbildungsgrades verwendet.

Wir weisen noch einmal darauf hin, dass jede eigentliche Abbildung eine abgeschlossene Menge  $A \subset X$  in eine abgeschlossene Menge  $F(A) \subset Y$  ab.

Falls  $F(A)$  nicht abgeschlossen wäre, existiert eine Folge  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  mit  $x_n \rightarrow x \in A$  und  $F(x_n) \rightarrow y \notin F(A)$ . Bilden wir jetzt die erweiterte Menge  $N = \{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{y\}$ , so ist diese in  $Y$  kompakt und folglich muss  $F^{-1}(N) \subset X$  ebenfalls kompakt sein. Daraus folgt aber mit  $F(x) = y$  und  $x_n \rightarrow x$  ein Widerspruch. ■

Falls  $y \in Y$ , so bezeichnet im weiteren  $\#y$  die *Kardinalzahl* von  $F^{-1}(y)$ . Das folgende Ergebnis ist von entscheidender Bedeutung für die weiteren Untersuchungen, da es die Anzahl und die Struktur der möglichen Lösungen von  $F(x) = y$  beschreibt.

**Satz 1** *Es sei  $F \in C(X, Y)$  eigentlich und lokal invertierbar in  $X$ . Dann ist  $\#y$  für alle  $y \in Y$  endlich und lokal konstant.*

**Beweis:** 1. Schritt

Da  $F$  eine eigentliche Abbildung ist, muss für alle  $y \in Y$  das Urbild  $F^{-1}(y)$  kompakt sein. Da

$F$  lokal invertierbar ist, muss diese Menge auch diskret sein. Somit muss  $\#y$  endlich.

## 2. Schritt

Es sei  $y \in Y$  beliebig und  $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Dann folgt nach dem 1. Schritt, dass für ein geeignetes  $k \in \mathbb{N}$

$$F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$$

gilt. Da  $F$  lokal invertierbar ist, existiert für jedes  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , eine Umgebung  $U_i = U_i(x_i)$  und eine Umgebung  $V = V(y)$ , so dass

$$F|_{U_i}$$

ein Diffeomorphismus von  $U_i$  auf  $V$  darstellt.

Damit gilt für alle  $z \in V$  die Abschätzung

$$\#z \geq k, \tag{1}$$

da die Gleichung  $F(u) = z$  stets genau eine Lösung in den  $k$  Mengen  $U_i$  hat. Wir zeigen jetzt, dass eine Umgebung  $W = W(y) \subset V$  existiert, so dass

$$\#w = k \text{ für alle } w \in W \tag{2}$$

erfüllt ist:

Falls das nicht der Fall ist, so würde eine Folge  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  mit  $y_n \rightarrow y$  und  $\#y_n \neq k$  existieren.

Nach (1) gilt somit  $\#y_n > k$  und damit existiert für jedes  $n$  ein

$$p_n \in X \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i$$

mit  $F(p_n) = y_n$  und  $y_n \rightarrow y$ . Da  $F$  eigentlich ist, gilt (eventuell nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge)  $p_n \rightarrow p \in X$ . Da  $F$  stetig ist und  $y_n \rightarrow y$  gilt, ergibt sich hieraus  $F(p) = y$ , d.h.,  $p \in F^{-1}(y)$ , und damit wegen  $p \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i$  nach der Definition der Mengen  $U_i$  ein Widerspruch zu  $p_n \notin U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , und  $p_n \rightarrow p$ . Damit ist (2) und der Satz bewiesen. ■

**Bemerkung 1** Falls  $F$  nicht eigentlich ist, so kann  $\#y$  unendlich und damit nicht lokal konstant sein. Dazu wähle man  $X = Y = \mathbb{C}$  und  $F(z) = e^z$ . In diesem Fall ist  $F$  in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sogar lokal invertierbar (*Riemannsches Fläche* für  $\log z$ ).

Für die weiteren Untersuchungen verwenden wir den Begriff der *singulären Punkte*.

**Definition 2** Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $F : X \rightarrow Y$ .

(i)  $x_0 \in X$  ist ein *singulärer Punkt* von  $F$ , falls  $F$  in  $x_0$  nicht lokal invertierbar ist. Ansonsten nennt man  $x_0$  einen *regulären Punkt* von  $F$ .

(ii) Die Menge aller *singulären Punkte* von  $F$  wird mit  $\Sigma$  bezeichnet. Weiterhin setzen wir

$$\Sigma_0 = F^{-1}(F(\Sigma)), \quad X_0 = X \setminus \Sigma_0, \quad Y_0 = Y \setminus F(\Sigma).$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass  $\Sigma \subset X$  abgeschlossen ist.

Es sei  $x_n \in \Sigma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Falls  $x_n \rightarrow x_0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, so ist  $F$  in **jeder** Umgebung  $U(x_0)$  nicht lokal invertierbar. Somit gilt  $x_0 \in \Sigma$ . ■

Da andererseits  $F$  eine eigentliche Abbildung ist, folgt mit der Bemerkung vor dem Satz 1, dass  $F(\Sigma) \subset Y$  ebenfalls abgeschlossen ist. Somit ist auch  $\Sigma_0 \subset X$  abgeschlossen, und  $X_0 \subset X$  sowie  $Y_0 \subset Y$  müssen offen sein. Die Punkte aus  $F(\Sigma)$  bezeichnet man auch als *kritische Werte* und die aus  $Y_0$  als *nicht-kritische Werte*.

Damit sind wir in der Lage, ein Ergebnis herzuleiten, das die Bedeutung der *singulären Menge* für die Beschreibung der Lösungsstruktur der Gleichung

$$F(x) = y$$

für nicht-kritische Werte  $y \in Y_0$  zeigt.

**Satz 2** Es sei  $F \in C(X, Y)$  eine eigentliche Abbildung. Dann ist  $\#v$  konstant auf jeder zusammenhängenden Komponente von  $Y_0 = Y \setminus F(\Sigma)$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Einschränkung von  $F$  auf  $X_0$ , d.h.  $F^* = F|_{X_0}$  mit

$$F^* : X_0 \rightarrow Y_0.$$

Damit ist  $F^*$  lokal invertierbar in allen Punkten  $x \in X_0$  und eigentlich. Dann folgt mit Satz 1 das Ergebnis für jede zusammenhängende Komponente. (Würde sich der diskrete Wert innerhalb einer zusammenhängende Komponente ändern, so müsste mindestens ein  $y$  existieren, wo

#y nicht lokal konstant sein könnte.) ■

Dieses Ergebnis kann man noch verbessern (siehe Satz 3 unten), falls  $Y_0$  sogar *einfach-zusammenhängend* ist.

**Definition 3** Eine Menge  $M$  in einem topologischen Raum heißt *einfach-zusammenhängend*, falls sie

(i) *(bogenweise-) zusammenhängend* ist und

(ii) *jeder geschlossene Weg  $\sigma$  in  $M$  homotop zu einer Konstante ist, d.h. für jede Abbildung  $\sigma \in C([0, 1], M)$  mit  $\sigma(0) = \sigma(1)$  existiert eine Homotopie  $h \in C([0, 1] \times [0, 1], M)$  und ein  $v \in M$ , so dass*

$$\begin{aligned} h(s, 0) &= \sigma(s) && \text{für alle } s, \\ h(s, 1) &= v && \text{für alle } s, \\ h(0, t) &= h(1, t) && \text{für alle } t. \end{aligned} \tag{3}$$

Jeder geschlossenen Weg lässt sich somit *innerhalb* von  $M$  *stetig* auf einen Punkt zusammenziehen.

**Satz 3** Es sei  $F \in C(X, Y)$  eine *eigentliche* Abbildung,  $Y_0$  sei *einfach-zusammenhängend* und  $X_0$  sei *bogenweise-zusammenhängend*. Dann ist  $F$  ein *Diffeomorphismus* von  $X_0$  auf  $Y_0$ .

Falls die singuläre Menge  $\Sigma$  sogar **leer** ist, d.h., falls  $F$  auf ganz  $X$  lokal invertierbar ist, so gilt

$$X_0 = X, \quad Y_0 = Y.$$

In diesem Fall ergibt sich unmittelbar aus dem letzten Satz das folgende klassische Resultat über *globale Diffeomorphismen*.

**Satz 4 (Globaler Inversionssatz)** Es sei  $F \in C(X, Y)$  eine *eigentliche* Abbildung und lokal invertierbar auf ganz  $X$ . Dann ist  $F$  ein *Diffeomorphismus* von  $X$  auf  $Y$ .

Der **Beweis von Satz 3** erfolgt in mehreren Schritten mittels topologischer Methoden. Dafür verwenden wir u.a. den folgenden Begriff.

**Definition 4** Es sei  $F \in C(X, Y)$  und  $\sigma : [a, b] \rightarrow Y$  ein Weg in  $Y$ , d.h.,  $\sigma \in C([a, b], Y)$ . Wir sagen, dass der Weg  $\theta : [a, b] \rightarrow X$  die Abbildung  $F$  entlang des Weges  $\sigma$  invertiert, falls  $\sigma = F \circ \theta$  gilt, und das folgende Diagramm kommutiert.

In diesem Falle sagen wir, dass  $F$  entlang  $\sigma$  mittels der inversen Abbildung  $\theta$  invertierbar ist.

**Bemerkung 2** (i) (Existenz und Unität)

Es sei  $x \in X$  und  $y \in Y$  mit  $F(x) = y$ . **Weiterhin** setzen wir voraus, dass Umgebungen  $U = U(x)$  und  $V = V(y)$  existieren, so dass  $F|_U$  ein **Diffeomorphismus** von  $U$  auf  $V$  ist. Es sei jetzt ein Weg  $\sigma : [a, b] \rightarrow Y$  gegeben, so dass  $\sigma(a) = y$  und  $\sigma([a, b]) \subset V$  erfüllt ist. Dann definiert die Beziehung  $F(\theta(t)) = \sigma(t)$  einen Weg  $\theta$ , der die Abbildung  $F$  entlang des Weges  $\sigma$  invertiert:

$$\theta(t) = F^{-1}(\sigma(t)), \quad t \in [a, b].$$

Außerdem folgt wegen  $\sigma(a) = y$ , dass  $\theta(a) = x$  gilt und  $\theta$  der einzige Weg mit den angegebenen Eigenschaften ist. Außerdem ist  $\theta : [a, b] \rightarrow X$  stetig.

(ii) (Konstruktion des Weges  $\theta$  durch „Zusammenkleben“)

Es sei der Weg  $\sigma : [a, b] \rightarrow Y$  und  $c \in (a, b)$  gegeben. Wir setzen voraus, dass zwei Wege  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$ , existieren, so dass  $\theta_1 : [a, c] \rightarrow X$  die Abbildung  $F$  entlang  $\sigma|_{[a, c]}$  und  $\theta_2 : [c, b] \rightarrow X$  die Abbildung  $F$  entlang  $\sigma|_{[c, b]}$  invertiert. Außerdem gelte  $\theta_1(c) = \theta_2(c)$ . Dann definiert man den Weg  $\theta : [a, b] \rightarrow X$  durch  $\theta|_{[a, c]} = \theta_1$  und  $\theta|_{[c, b]} = \theta_2$ , der  $F$  entlang  $\sigma$  invertiert:  $\theta$  ist eindeutig definiert und auch im Punkt  $c$  stetig.

Wir beweisen jetzt folgendes Lemma, wobei die Mengen  $X_0$  und  $Y_0$  die gleiche Bedeutung wie im obigen Satz 2 haben.

**Lemma 1** Es sei  $x_0 \in X_0$  und  $y_0 = F(x_0) \in Y_0$ . Dann existiert für jeden Weg  $\sigma : [0, 1] \rightarrow Y_0$  mit  $\sigma(0) = y_0$  ein eindeutig bestimmter Weg  $\theta : [0, 1] \rightarrow X_0$  mit  $\theta(0) = x_0$ , der die Abbildung  $F$  entlang  $\sigma$  invertiert.

**Beweis:** Eindeutigkeit

Wir nehmen an, dass zwei Wege  $\theta_1$  und  $\theta_2$  mit  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = x_0$  existieren, die  $F$  entlang  $\sigma$  invertieren. Wir definieren jetzt

$$\xi = \sup\{s \in [0, 1] : \theta_1(t) = \theta_2(t), \quad t \in [0, s]\}.$$

Nach Bemerkung 2(i) ist die Definition von  $\xi$  sinnvoll. Wegen  $x_0 \in X_0$  und der lokalen Invertierbarkeit von  $F$  folgt weiterhin  $\xi > 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $F$  ergibt sich außerdem  $\theta_1(\xi) = \theta_2(\xi)$ . Wir nehmen nun an, dass die beiden Wege verschieden sind. Damit muss  $\xi < 1$  gelten. Wir setzen nun

$$x = \theta_1(\xi) = \theta_2(\xi), \quad y = F(x).$$

Nach Voraussetzung ist  $F$  lokal invertierbar auf  $X_0$ . Somit existiert eine Umgebung  $U = U(x)$  und eine Umgebung  $V = V(y)$ , so dass  $F|_U$  ein Diffeomorphismus ist. Da  $\theta_1$  und  $\theta_2$  stetig sind, existiert somit eine positive Zahl  $\varepsilon > 0$  mit

$$\theta_1([\xi, \xi + \varepsilon]) \subset U, \quad \theta_2([\xi, \xi + \varepsilon]) \subset U.$$

Somit muss für  $t \in [\xi, \xi + \varepsilon]$  wegen  $F(\theta_1(t)) = F(\theta_2(t)) = \sigma(t)$  auch  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$  gelten. Damit haben wir aber einen Widerspruch zur Definition von  $\xi < 1$ . Es muss also  $\xi = 1$  gelten. Daraus folgt aber die Eindeutigkeit.

#### *Existenz*

Wir definieren durch  $\mathcal{S}$  die Menge aller  $s \in [0, 1]$ , so dass  $F$  entlang  $\sigma|_{[0,s]}$  durch eine inverse Abbildung

$$\theta_s : [0, s] \rightarrow X_0$$

invertierbar ist, wobei  $\theta_s(0) = x_0$  und  $F(x_0) = y_0 = \sigma(0)$  erfüllt ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Menge  $\mathcal{S}$  sowohl *offen* als auch *abgeschlossen* in  $[0, 1]$  ist. Dann folgt wegen  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , da  $0 \in \mathcal{S}$ , dass  $\mathcal{S} = [0, 1]$  gelten muss.

Wir beginnen mit der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{S}$  und setzen  $\xi = \sup \mathcal{S}$ . Nach den vorherigen Überlegungen gilt zunächst  $\xi > 0$ . Nach Bemerkung 2(i) stimmen alle  $\theta_s$  auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein. Mit  $\theta$  bezeichnen wir dann die Funktion, die den Weg auf  $[0, \xi]$  definiert.

Es gelte nun  $s_n \uparrow \xi$  und  $\sigma(s_n) \rightarrow y$ . Da  $\theta(s_n) = F^{-1}(\sigma(s_n))$  gilt und die Abbildung  $F$  eigentlich ist, folgt  $\theta(s_n) \rightarrow x$  mit  $F(x) = y$ . Es seien nun  $U = U(x)$  und  $V = V(y)$  geeignete Umgebungen, so dass  $F|_U$  ein Diffeomorphismus ist. Wir wählen jetzt  $m \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, so dass

$$\theta(s_m) \in U, \quad \sigma([s_m, \xi]) \subset V$$

erfüllt ist. Damit ist  $F$  entlang  $\sigma|_{[s_m, \xi]}$  durch einen Weg  $\theta_1$  mit  $\theta_1(s_m) = \theta(s_m)$  invertierbar. Nach Bemerkung 2(ii) ist somit  $F$  entlang  $\sigma|_{[0, \xi]}$  invertierbar. Daraus folgt aber mit  $\xi \in \mathcal{S}$ , dass  $\mathcal{S}$  abgeschlossen ist.

Den Nachweis, dass  $\mathcal{S}$  auch offen ist, erfolgt analog zum obigen Vorgehen: Falls  $\xi < 1$  gelten würde, so können wir den gerade eingeführten Weg  $\theta_1$  auf einem geeigneten Intervall  $[s_m, \xi + \alpha]$ ,  $\alpha > 0$  hinreichend klein, verwenden. Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von  $\xi$ . Damit ist der Beweis beendet. ■

Im folgenden wird durch  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  ein Quader bezeichnet. Es seien dann  $\theta$  und  $\sigma$  stetige Abbildungen (bezeichnet als 2er-Weg) mit

$$\theta : Q \rightarrow X, \quad \sigma : Q \rightarrow Y.$$

Analog zu oben sagen wir, dass  $\theta$  die Abbildung  $F$  entlang  $\sigma$  invertiert, falls

$$F \circ \theta = \sigma$$

gilt und das zugehörige Diagramm kommutiert.

Dann kann man ein analoges Resultat zu Lemma 1 beweisen, wobei ähnliche Methoden wie beim Beweis dieses Lemma verwendet werden.

**Lemma 2** *Es sei  $x_0 \in X_0$  und  $y_0 = F(x_0) \in Y_0$  gegeben. Dann existiert für jeden 2er-Weg  $\sigma : Q \rightarrow Y_0$  mit  $\sigma(0, 0) = y_0$  ein eindeutig bestimmter 2er-Weg  $\theta : Q \rightarrow X_0$  mit  $\theta(0, 0) = x_0$ , der die Abbildung  $F$  entlang  $\sigma$  invertiert.*

Damit sind wir in der Lage, Satz 3 zu beweisen.

### **Beweis von Satz 3**

Aus Satz 2 folgt, dass  $\#y$  für alle  $y \in Y_0$  konstant ist und  $\#y \geq 1$  gilt. Somit ist  $F$  eine Abbildung auf  $Y_0$ . Wir müssen nur noch zeigen, dass  $\#y = 1$  für alle  $y \in Y_0$  erfüllt ist. Das beweisen wir indirekt, indem wir annehmen, dass zwei Punkte  $x_0, x_1 \in X_0$  existieren mit  $F(x_0) = F(x_1) = y$ . Da  $X_0$  bogenweise-zusammenhängend ist, können wir einen Weg  $\theta \in C([0, 1], X_0)$  finden mit  $\theta(0) = x_0$  und  $\theta(1) = x_1$ . Damit ist  $\sigma = F \circ \theta$  eine geschlossene Kurve in der

einfach-zusammenhängenden Menge  $Y_0$ . Folglich existiert nach Definition eine Homotopie  $h \in C(Q, Y_0)$  mit der Eigenschaft (3). Wir nehmen jetzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $h(s, 1) = y$  und

$$h(0, t) = h(1, t) = y \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad (4)$$

gilt. Nach Lemma 2 existiert ein 2er-Weg  $\Theta \in C(Q, X_0)$ , der  $F$  entlang der Homotopie  $h$  invertiert. Damit haben wir wegen  $F \circ \Theta = h$  und  $h(0, 0) = y$

$$\begin{aligned} \Theta(0, 0) &= x_0 \\ F(\Theta(s, t)) &= h(s, t) \quad \text{für alle } (s, t) \in Q. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt mit (3), dass  $F(\Theta(s, 0)) = h(s, 0) = \sigma(s)$  und somit  $\Theta(s, 0) = \theta(s)$  für alle  $s \in [0, 1]$  gelten muss. Folglich haben wir nach Konstruktion

$$\Theta(1, 0) = \theta(1) = x_1. \quad (5)$$

Andererseits ergibt sich aus (4)

$$\begin{aligned} F(\Theta(0, t)) &= h(0, t) = y, \\ F(\Theta(s, 1)) &= h(s, 1) = y, \\ F(\Theta(1, t)) &= h(1, t) = y. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt

$$\Gamma = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]),$$

so gilt  $\Theta|_{\Gamma} = \text{konstant}$ . Insbesondere erhalten wir wegen

$$\Theta(1, 0) = \Theta(0, 0) = x_0$$

ein Widerspruch zu (5). Also muss  $\#y = 1$  gelten. Damit ist der Beweis beendet. ■

## 5.2 Anwendungsbeispiel

Wir beschäftigen uns jetzt mit einer Klasse von semilinearen Randwertproblemen, die *asymptotisch* linear sind. Gegeben sei

$$-\Delta u = g(u) + h \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (6)$$

Dabei ist  $\Omega$  wie üblich ein beschränktes und glattes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Weiterhin bezeichnen wir mit  $\lambda_1 > 0$  den ersten Eigenwert von

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (7)$$

und mit  $\varphi_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$  die zugehörige positive Eigenfunktion, siehe Satz 9 im Abschnitt 2.4. Dann lässt sich die folgende Aussage beweisen.

**Satz 5** *Die Funktion  $g \in C^1(\mathbb{R})$  erfülle die Bedingungen*

- (i)  $g(t) \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,
- (ii) es existieren Zahlen  $\gamma < \lambda_1$  und  $b \geq 0$ , so dass

$$g(t) \leq \gamma t + b$$

für alle  $t \geq 0$ ,

- (iii)  $g'(t) < \lambda_1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Dann hat (6) eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  für jedes  $h \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

Wir wollen zum Beweis den globalen Inversionssatz anwenden. Wir definieren jetzt

$$\begin{aligned} X &= C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \\ Y &= C^\alpha(\bar{\Omega}), \\ F &: X \rightarrow Y, \quad F(u) = \Delta u + g(u). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $F \in C^1(X, Y)$ , und für vorgegebenes  $h \in Y$  ist jedes  $u \in X$  mit  $F(u) = -h$  eine Lösung von (6).

Zum Beweis verwenden wir die folgenden beiden Resultate, die die lokale Invertierbarkeit der eigentlichen Abbildung  $F$  zeigen.

**Lemma 3**  *$F$  ist lokal invertierbar auf  $X$ .*

**Beweis:** Es gilt

$$F'(u)v = \Delta v + g'(u)v.$$

Verwenden wir jetzt Satz 10 im Abschnitt 2.4, so folgt  $F'(u) \in Iso(X, Y)$ , falls

$$-\Delta v = g'(u)v \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

nur die triviale Lösung hat. Das folgt aber unmittelbar aus der Bedingung (iii) und der Anwendung des Monotonieverhaltens der Eigenwerte, siehe Satz 9(ii)(a) im Abschnitt 2.4, da  $\lambda_1(g'(u)) > 1$  gilt. ■

**Lemma 4** *F ist eine eigentliche Abbildung.*

**Beweis:** Es seien die Folgen

$$\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset Y, \quad \{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X,$$

gegeben, so dass  $\|h_n\|_Y \leq C$  und  $F(u_n) = -h_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gilt. Wir zeigen, dass eine Zahl  $c > 0$  existiert mit

$$\|u_n\|_{L_\infty} \leq c. \tag{8}$$

*1. Schritt*

Es existiert eine Zahl  $c_1 > 0$ , so dass

$$u_n(x) \geq -c_1 \text{ für alle } x \in \Omega. \tag{9}$$

Es sei  $\Omega^*$  ein beschränktes Gebiet mit  $\bar{\Omega} \subset \Omega^*$ . Mit  $\lambda_1^*$  bezeichnen wir den ersten Eigenwert von  $-\Delta$  auf  $\Omega^*$  mit homogener Dirichlet-Randbedingung und mit  $\varphi_1^*$  die zugehörige normierte positive Eigenfunktion mit  $\varphi_1^* > 0$  in  $\Omega^*$  und  $\|\varphi_1^*\|_{L_\infty} = 1$ . Es gilt also

$$-\Delta\varphi_1^* = \lambda_1^*\varphi_1^* \text{ in } \Omega^*, \quad \varphi_1^* = 0 \text{ auf } \partial\Omega^*.$$

Da  $\bar{\Omega} \subset \Omega^*$  und  $\varphi_1^* > 0$  auf  $\Omega^*$ , gilt  $m^* = \min_{x \in \bar{\Omega}} \varphi_1^*(x) > 0$ . Wir definieren jetzt  $c^* = C \cdot (\lambda_1^* m^*)^{-1}$ .

Unter Verwendung von (i) und der Definition von  $c^*$  erhalten wir

$$\begin{aligned} -\Delta(u_n + c^*\varphi_1^*) &= g(u_n) + h_n + c^*\lambda_1^*\varphi_1^* \\ &\geq h_n + c^*\lambda_1^*\varphi_1^* \geq h_n + C \geq 0. \end{aligned}$$

Da außerdem  $u_n(x) + c^*\varphi_1^*(x) > 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$ , erfüllt ist, erhalten wir mittels klassischem Maximumprinzip, siehe Abschnitt 2.4, dass  $u_n \geq -c^*\varphi_1^*$  in  $\Omega$  gilt. Daraus folgt aber (9).

*2. Schritt*

Es existiert eine Zahl  $c_2 > 0$ , so dass

$$u_n(x) \leq c_2 \text{ für alle } x \in \Omega. \tag{10}$$

$C$  hat die gleiche Bedeutung wie oben. Es sei  $K = C + b$  (und somit  $K > 0$ ), und  $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$  sei die (eindeutige) Lösung von

$$-\Delta w = \gamma w + K \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wir bemerken, dass aus  $\gamma < \lambda_1$  die Eindeutigkeit folgt. Mit dem Maximum-Prinzip ergibt sich weiter, dass  $w > 0$  in  $\Omega$  erfüllt ist. Für  $z_n = w - u_n$  gilt

$$-\Delta z_n = -\Delta w + \Delta u_n = \gamma w + K - g(u_n) - h_n \quad \text{in } \Omega, \quad z_n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Es sei jetzt

$$\Omega_n^+ = \{x \in \Omega : u_n(x) > 0\}.$$

Nach Voraussetzung (ii) ergibt sich mit der Wahl von  $K = C + b$

$$-\Delta z_n \geq \gamma w + K - \gamma u_n - b - h_n = \gamma(w - u_n) + C - h_n \geq \gamma z_n \quad \text{in } \Omega_n^+.$$

Außerdem ist  $z_n(x) = w(x) \geq 0$  für alle  $x \in \partial\Omega_n^+$ . Unter Verwendung der Monotonie der Eigenwerte, siehe Satz 9(ii)(b), folgt zunächst

$$\lambda_1(\Omega_n^+) \geq \lambda_1.$$

Nach Voraussetzung (ii) ist andererseits  $\gamma < \lambda_1$ . Somit ergibt sich mit dem mittels klassischem Maximum-Prinzip (siehe Abschnitt 2.4), dass  $z_n \geq 0$  in  $\Omega_n^+$ . Da  $z_n = w - u_n > 0$  in  $\Omega \setminus \Omega_n^+$ , erhalten wir  $z_n \geq 0$  in  $\Omega$  und damit (10). Zusammen mit (9) folgt schließlich (8).

### 3. Schritt

Da

$$-\Delta u_n = g(u_n) + h_n$$

erfüllt ist, ergibt sich aus (8) und dem mehrfachen Gebrauch der Abbildungseigenschaften von  $\Delta$  mittels sogenannter *bootstrap arguments*, dass  $\|u_n\|_X \leq K$ ,  $K > 0$  geeignet gewählt, gilt. Damit konvergiert wegen der kompakten Einbettung

$$C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega}), \quad \alpha > 0,$$

die Folge der  $u_n$  in  $C^2(\overline{\Omega})$  und folglich auch  $g(u_n) + h_n$  in  $C^\alpha(\overline{\Omega})$ . Die nochmalige Anwendung der Abbildungseigenschaften liefert damit die Konvergenz der Folge  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  im Banachraum  $X$ . Damit ist der Beweis beendet. ■

### 5.3 Inversionen mit Singularitäten

In diesem Abschnitt betrachten wir die globale Invertierbarkeit von Abbildungen  $F : X \rightarrow Y$ , wobei die singuläre Menge  $\Sigma$  so beschaffen ist, dass Satz 3 *nicht* angewendet werden kann (siehe Lemma 6 unten). Unser Ziel besteht jetzt darin, eine globale Beschreibung der Mengen  $\Sigma$ ,  $F(\Sigma)$  und des Bildes  $R(F)$  zu geben. Dabei soll im folgenden stets

$$F \in C^2(X, Y)$$

gelten. Wir ersetzen dabei in den nachfolgenden Untersuchungen die Menge der singulären Punkte

$$\Sigma = \{x \in X : F \text{ ist in } x \text{ nicht lokal invertierbar}\}$$

aus Definition 2(i) durch die Menge

$$\Sigma' = \{x \in X : F'(x) \notin Iso(X, Y)\}.$$

Nach dem lokalen Inversionssatz folgt aus  $F'(x) \in Iso(X, Y)$ , dass  $F$  in  $x$  lokal invertierbar ist. Damit gilt  $\Sigma \subseteq \Sigma'$ .

Es sei jetzt  $x \in \Sigma'$ , und es gelten die folgenden Bedingungen:

- (i) der Kern  $\ker(F'(x))$  ist eindimensional, d.h. es existiert ein  $\varphi \in X \setminus \{0\}$  mit

$$\ker(F'(x)) = \mathbb{R}\varphi,$$

- (ii) das Bild  $R(F'(x))$  ist abgeschlossen und hat die Kodimension 1 bezüglich des Banachraumes  $Y$ , und

- (iii) es existiert ein  $\bar{\varphi} \in X$  mit  $F''(x)[\bar{\varphi}, \varphi] \notin R(F'(x))$ .

Nach (ii) existiert somit eine eindimensionale Menge  $M \subset Y$  mit  $Y = M \oplus R(F'(x))$ . Wegen (i) und (ii) ist  $F'(x)$  ein *Fredholm-Operator* mit Index  $\text{ind } F'(x) = 0$ .

**Definition 5** Eine Teilmenge  $M$  von  $X$  ist eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1, falls für alle  $x^* \in M$  eine Zahl  $\delta > 0$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $\Gamma : B_\delta(x^*) \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass

$$M \cap B_\delta(x^*) = \{x \in B_\delta(x^*) : \Gamma(x) = 0\}, \quad (11)$$

$$\Gamma'(x^*) \neq 0. \quad (12)$$

Wir beweisen zunächst folgendes klassisches Resultat der Differentialgeometrie.

**Lemma 5** *Es sei  $M$  eine abgeschlossene und zusammenhängende  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1 im Banachraum  $X$ . Dann hat die Menge  $X \setminus M$  höchstens zwei zusammenhängende Komponenten.*

**Beweis:** Wir nehmen indirekt an, dass drei nichtleere, offene und disjunkte Teilmengen  $\Omega_i \subset X$ ,  $i = 1, 2, 3$ , existieren mit

$$X \setminus M = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3.$$

Da  $X \setminus M$  offen ist, muss auch jedes  $\Omega_i$  in  $X$  offen sein. Wir bezeichnen mit  $\partial\Omega_i$  den Rand von  $\Omega_i$ . Dann muss  $\partial\Omega_i \neq \emptyset$  für  $i = 1, 2, 3$  gelten, da ansonsten  $\Omega_i$  auch abgeschlossen wäre. Weiterhin haben wir für  $i = 1, 2, 3$ , dass  $\partial\Omega_i \subset M$  gilt, und dass diese Mengen  $\partial\Omega_i$  bezüglich  $M$  abgeschlossen sind. Da nach Voraussetzung  $M$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1 in  $X$  ist, existiert für jedes  $x^* \in M$  ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x^*) \cap (X \setminus M)$  genau aus zwei Komponenten, z.B.  $U_1$  und  $U_2$ , besteht. Damit können **höchstens zwei** von diesen drei Mengen  $\Omega_i$  einen nichtleeren Durchschnitt mit  $B_\varepsilon(x^*)$  haben. Somit kann auch  $B_\varepsilon(x^*) \cap M$  in höchstens zwei der Mengen  $\partial\Omega_i$  enthalten sein. Nehmen wir zum Beispiel an, dass  $U_1$  in  $\Omega_1$  und  $U_2$  in  $\Omega_2$  enthalten ist.

Dann folgt daraus

$$\partial\Omega_3 \cap [B_\varepsilon(x^*) \cap M] = \emptyset. \quad (13)$$

Nun wählen wir einen beliebigen Punkt  $v \in \partial\Omega_3$ . Dann existiert, analog zu oben, ebenfalls ein  $\delta > 0$ , so dass

$$B_\delta(v) \cap [X \setminus M]$$

ebenfalls aus zwei Komponenten  $V_1, V_2$  besteht. Da  $v \in \partial\Omega_3$  gilt, muss notwendigerweise eine von diesen beiden Komponenten  $V_i$  in  $\Omega_3$  liegen. Somit gehören alle  $w \in B_\delta(v) \cap M$  zu  $\partial\Omega_3$ , d.h., wir haben

$$B_\delta(v) \cap M \subset \partial\Omega_3.$$

Folglich ist  $\partial\Omega_3$  (abgeschlossen und) offen bezüglich  $M$ . Da  $M$  aber zusammenhängend ist, erhalten wir folglich  $M = \partial\Omega_3$  und damit einen Widerspruch zu (13). ■

Wie vorher bezeichnet  $\Sigma$  die singuläre Menge bzgl. der Abbildung  $F$ , d.h., wir haben

$$\Sigma = \{x \in X : F \text{ ist in } x \text{ nicht lokal invertierbar}\}$$

und somit

$$\Sigma \subseteq \Sigma' = \{x \in X : F'(x) \notin Iso(X, Y)\}.$$

Als erstes beweisen wir jetzt eine Aussage über die Struktur der Menge  $\Sigma'$ , falls die Elemente von  $\Sigma'$  bestimmte Eigenschaften besitzen.

**Lemma 6** *Für alle  $x \in \Sigma'$  gelten die Bedingungen (i), (ii) und (iii). Dann ist die Menge  $\Sigma'$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1 in  $X$ .*

**Beweis:** Wir fixieren ein beliebiges  $x^* \in \Sigma'$ . Wir wollen jetzt die Menge  $\Sigma'$  in einer Umgebung von  $x^*$  beschreiben. Dazu setzen wir

$$V = \ker(F'(x^*)), \quad R = R(F'(x^*)).$$

Nach den Bedingungen (i) und (ii) existieren zunächst abgeschlossene Teilräume  $W \subset X$  und  $Z \subset Y$  mit  $\text{codim } W = \dim Z = 1$  und

$$X = V \oplus W, \quad Y = Z \oplus R.$$

Weiterhin finden wir ein  $\varphi \in X \setminus \{0\}$  mit  $F'(x^*)\varphi = 0$  und  $V = \mathbb{R}\varphi$ . Andererseits existiert unter Verwendung des *Satzes von Banach–Hahn* ein nichttriviales Funktional  $\psi \in Y^* \setminus \{0\}$  in Abhängigkeit von unserem fixierten  $x^*$ , so dass  $R = \ker \psi = \{v \in Y : \langle \psi, v \rangle = 0\}$  gilt.

Eine Möglichkeit besteht in folgender Konstruktion: Wegen  $Y = Z \oplus R$  hat jedes  $y \in Y$  die eindeutige Darstellung

$$y = sz + r, \quad r \in R, 0 \neq z \in Z, s \in \mathbb{R}.$$

Somit können wir z.B.

$$\langle \psi, y \rangle = s, \quad \text{falls } y = sz + r,$$

wählen. Dann folgt hieraus  $\ker \psi = R$  und  $\langle \psi, z \rangle = 1$ .

Damit erhalten wir folgende Zerlegung für die Räume  $X$  und  $Y$ .

$$X = V \oplus W = \mathbb{R}\varphi \oplus W, \quad Y = Z \oplus R = Z \oplus \ker \psi.$$

Für jedes  $x \in X$  existiert damit ein eindeutig bestimmtes  $t \in \mathbb{R}$  und  $w \in W$ , so dass

$$x = t\varphi + w.$$

Wir bezeichnen jetzt mit

$$Q : Y \rightarrow \ker \psi, \quad P = \text{id}_Y - Q : Y \rightarrow Z$$

die Projektion von  $Y$  auf  $R = \ker \psi$  bzw. die Projektion von  $Y$  auf  $Z$ .

Es sei  $z \in Z$  mit  $\langle \psi, z \rangle = 1$ . Dann gilt für alle  $y \in Y$  die Zerlegung

$$y = Py + Qy, \quad Py \in Z, \quad Qy \in R,$$

mit  $Py = \langle \psi, y \rangle z$ .

Wir untersuchen jetzt die Frage, wann für einen Punkt  $u$ , der nahe bei  $x^*$  liegt, die Beziehung  $F'(u) \in \text{Iso}(X, Y)$  gilt oder nicht gilt. Dazu betrachten wir entsprechend der obigen Darstellung von  $x$  die Gleichung

$$F'(u)x = F'(u)(t\varphi + w) = y.$$

Diese Gleichung hat für fixierte  $u \in X$  und  $y \in Y$  offensichtlich eine *eindeutige Lösung*  $x = t\varphi + w$ , wenn man auf eindeutige Weise die reelle Zahl  $t$  und das Element  $w \in W$  bestimmen kann.

Wenden wir auf unsere Ausgangsgleichung die Projektionen  $P$  und  $Q$  im Raum  $Y$  an, so erhalten wir mittels der *Lyapunov-Schmidt-Reduktion* das Gleichungssystem (*Bifurkationssystem*)

$$\begin{aligned} PF'(u)(t\varphi + w) &= Py, \\ QF'(u)(t\varphi + w) &= Qy. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir setzen jetzt in diesem System  $u = x^*$  ein. Dann gilt nach Definition der Menge  $\Sigma'$  und der Bedingung (i) die Gleichung  $F'(x^*)\varphi = 0$ , und wir haben damit für die zweite Gleichung

$$QF'(x^*)w = Qy.$$

$QF'(x^*)$  ist offensichtlich invertierbar, wenn man sie als lineare beschränkte Abbildung von  $W$  auf  $R$  betrachtet. Da nach Lemma 3 im Abschnitt 4.1 die Menge  $Iso(W, R)$  offen ist, existiert ein  $\delta > 0$  derart, dass

$$QF'(u) \in Iso(W, R)$$

für alle  $u \in B_\delta(x^*)$  gilt. Damit ist es sinnvoll, den inversen Operator

$$T = [QF'(u)]^{-1} \in Iso(R, W)$$

für beliebiges  $u \in B_\delta(x^*)$  zu definieren. Wir erhalten somit aus der zweiten Gleichung in (14)

$$w = T[Qy - tQF'(u)\varphi]$$

und anschließend aus der ersten Gleichung durch die Substitution von  $w$

$$tPF'(u)\varphi + PF'(u)T[Qy - tQF'(u)\varphi] = Py.$$

Damit ist (14) unter Beachtung der Definition der Projektion  $Py = \langle \psi, y \rangle z$ ,  $y \in Y$ , mit  $z \neq 0$  wegen  $\langle \psi, z \rangle = 1$  äquivalent zu folgendem System

$$t\langle \psi, F'(u)\varphi \rangle - t\langle \psi, F'(u)TQF'(u)\varphi \rangle = \langle \psi, y \rangle - \langle \psi, F'(u)TQy \rangle, \quad (15)$$

$$w = T[Qy - tQF'(u)\varphi]. \quad (16)$$

Bei vorgegebenen  $y \in Y$  und  $u \in X$  ist folglich (15) eindeutig lösbar bezüglich  $t$ , falls

$$\langle \psi, F'(u)\varphi \rangle - \langle \psi, F'(u)TQF'(u)\varphi \rangle \neq 0$$

erfüllt ist. Damit ergibt sich aber, dass  $u \in X$  nahe bei  $x^* \in \Sigma'$  genau dann **singulär** ist (d.h. wir haben  $u \in \Sigma' \cap B_\delta(x^*)$ ), wenn

$$\langle \psi, F'(u)\varphi \rangle - \langle \psi, F'(u)TQF'(u)\varphi \rangle = 0$$

gilt. Wir definieren deshalb das Funktional  $\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Gamma(u) = \langle \psi, F'(u)\varphi \rangle - \langle \psi, F'(u)TQF'(u)\varphi \rangle, \quad u \in X,$$

und erhalten folglich

$$u \in \Sigma' \cap B_\delta(x^*) \iff \Gamma(u) = 0, \quad u \in B_\delta(x^*).$$

Aus der Definition des Funktionals  $\Gamma$  ergibt sich sofort unter Berücksichtigung der Voraussetzungen  $F \in C^2(X, Y)$ , dass  $\Gamma$  zur Klasse  $C^1$  gehört. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass auch die zweite Bedingung für eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit, d.h. (12), erfüllt ist. Durch Differenzieren der Bestimmungsgleichung von  $\Gamma$  erhalten wir unter Verwendung von  $F'(x^*)\varphi = 0$ , dass

$$\Gamma'(x^*)u = \langle \psi, F''(x^*)[u, \varphi] \rangle. \quad (17)$$

Damit ergibt sich wegen der Bedingung (iii) die Existenz von  $\bar{\varphi}$  mit

$$\Gamma'(x^*)\bar{\varphi} = \langle \psi, F''(x^*)[\bar{\varphi}, \varphi] \rangle \neq 0,$$

d.h. wir haben (12) nachgewiesen. Der Beweis des Lemmas ist damit beendet. ■

Unser nächstes Ziel besteht darin, die Menge  $F(\Sigma')$  zu beschreiben. Dazu verschärfen wir die obige Bedingung (iii), um die singulären Punkte besser klassifizieren zu können.

**Definition 6** *Ein Punkt  $x \in \Sigma'$  heißt gewöhnlicher singulärer Punkt, falls (i), (ii) und anstelle von (iii) sogar*

$$(iv) F''(x)[\varphi, \varphi] \notin R(F'(x))$$

*erfüllt ist, wobei  $\varphi$  die gleiche Bedeutung wie in (i) hat.*

Unter Verwendung dieser Restriktion sind wir nun in der Lage, folgendes Ergebnis zu beweisen.

**Lemma 7** *Es sei  $x^*$  ein gewöhnlicher singulärer Punkt. Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine Abbildung  $\Psi \in C^1(B_\varepsilon(x^*), Y)$  mit*

$$(I) \Psi'(x^*) \in Iso(X, Y),$$

$$(II) \Psi(u) = F(u) \text{ für alle } u \in \Sigma' \cap B_\varepsilon(x^*).$$

**Beweis:** Wir verwenden dazu die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis des letzten Lemmas. Insbesondere erfüllt  $z \in Z \subset Y$ ,  $z \neq 0$ , die oben angegebene Eigenschaft  $\langle \psi, z \rangle = 1$  und wir haben  $R = \ker \psi$ . Damit gilt nach den Untersuchungen im Beweis von Lemma 6 folgende Aussage

$$\Sigma' \cap B_\delta(x^*) = \Gamma^{-1}(0).$$

Wir definieren jetzt die Abbildung  $\Psi : B_\delta(x^*) \rightarrow Y$  durch

$$\Psi(u) = F(u) + \Gamma(u) \cdot z.$$

Offensichtlich gehört diese Abbildungen wegen  $F \in C^2(X, Y)$  und unseren früheren Überlegungen bezüglich der Abbildung  $\Gamma$  zur Klasse  $C^1(B_\delta(x^*), Y)$ , und wir haben

$$\Psi(u) = F(u)$$

für alle  $u \in \Sigma' \cap B_\delta(x^*)$ . Weiterhin gilt

$$\Psi'(x^*)u = F'(x^*)u + [\Gamma'(x^*)u] \cdot z.$$

Jetzt setzen wir  $u = t\varphi + w$  und verwenden  $F'(x^*)\varphi = 0$  sowie (17). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi'(x^*)u &= F'(x^*)w + t[\Gamma'(x^*)\varphi] \cdot z + [\Gamma'(x^*)w] \cdot z \\ &= F'(x^*)w + t\langle \psi, F''(x^*)[\varphi, \varphi] \rangle z + \langle \psi, F''(x^*)[w, \varphi] \rangle z. \end{aligned}$$

Wie bereits nachgewiesen, hat die Gleichung  $\Psi'(x^*)u = y$ ,  $y \in Y$ , unter Verwendung der Projektionen  $P$  und  $Q$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u = t\varphi + w$ , falls (bezüglich  $t$ ) die Bedingung

$$\langle \psi, F''(x^*)[\varphi, \varphi] \rangle \neq 0$$

erfüllt ist ( $z \neq 0$ ). Somit haben wir  $\Psi'(x^*) \in Iso(X, Y)$ , falls die Bedingung (iv) in der letzten Definition gilt. Daraus ergibt sich aber (I). Der Beweis ist somit beendet. ■

Unter Verwendung von Lemma 7 können wir jetzt die Menge  $F(\Sigma')$  beschreiben.

**Lemma 8** *Falls jedes  $x \in \Sigma'$  ein gewöhnlicher singulärer Punkt ist, so ist die Menge  $F(\Sigma')$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1 in  $Y$ .*

**Beweis:** Nach Lemma 7 existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $N$  von  $F(x)$ , so dass die Abbildung  $\Psi$  einen Diffeomorphismus zwischen  $B_\varepsilon$  und  $N$  definiert. Folglich gehört das Funktional

$$\gamma : \Gamma \circ \Psi^{-1} : N \rightarrow \mathbb{R}$$

zur Klasse  $C^1$  und hat eine nichttriviale Ableitung. Weiterhin folgt aus Lemma 7(II) und den Eigenschaften von  $\Gamma$ , dass  $F(\Sigma') \cap N = \gamma^{-1}(0)$  gilt. Verwendet man abschließend Definition 5, so folgt die Aussage des Lemmas. ■

Wir wollen jetzt zeigen, wie man die obige Bedingung (iv) aus Definition 6 verwenden kann, um *lokal* die Anzahl der Lösungen von  $F(x) = y$  in der Umgebung eines *gewöhnlichen* singulären Punktes  $x \in \Sigma'$  berechnen zu können. Nach den vorangegangenen Untersuchungen ist die Bedingung (iv) äquivalent zu

$$\langle \psi, F''(x)[\varphi, \varphi] \rangle \neq 0.$$

Im folgenden haben  $\varphi$  und  $z$  wieder die gleiche Bedeutung wie im Beweis von Lemma 6.

**Lemma 9** *Es sei  $x^* \in \Sigma'$  ein gewöhnlicher singulärer Punkt mit  $\ker(F'(x^*)) = \mathbb{R}\varphi$ , und es gelte z.B.*

$$\langle \psi, F''(x^*)[\varphi, \varphi] \rangle > 0$$

*sowie  $y^* = F(x^*)$ . Dann existieren Zahlen  $\varepsilon > 0$  und  $\sigma > 0$ , so dass die Gleichung*

$$F(x) = y^* + sz, \quad x \in B_\varepsilon(x^*),$$

(a) **genau zwei** Lösungen hat für alle  $0 < s < \sigma$

und

(b) **keine** Lösung hat, falls  $-\sigma < s < 0$  gilt.

**Beweis:** Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $x^* = 0$  und  $y^* = 0$  und somit

$$F(0) = 0$$

gilt. Folglich müssen wir nun die Gleichung  $F(x) = sz$  in  $B_\varepsilon(0)$  untersuchen. Wir setzen jetzt  $A = F'(0)$  (lineare Abbildung) und erhalten wegen  $F(0) = 0$  und  $A = F'(0)$  mittels Taylorentwicklung

$$F(x) = Ax + \omega(x).$$

Substituieren wir jetzt wie üblich  $x = t\varphi + w$ , so geht die Ausgangsgleichung  $F(x) = sz$  unter Verwendung von  $F'(0)\varphi = 0$  ( $\varphi \in \ker F'(0)$ ) in

$$Aw + \omega(t\varphi + w) = sz$$

über. Wenden wir auf diese Gleichung die Lyapunov–Schmidt-Reduktion analog zum Beweis von Lemma 6 an, so erhalten wir wegen  $Aw \in R$ , d.h., es gilt  $QAw = Aw$ , und  $Pz = z$  das äquivalente Bifurkationssystem

$$Aw + Q\omega(t\varphi + w) = 0, \tag{18}$$

$$P\omega(t\varphi + w) = sz. \tag{19}$$

Dabei ist (18) wieder der reguläre Teil. Wegen  $F(0) = 0$  und  $A0 = 0$  erhalten wir zunächst aus  $F(0) = A0 + \omega(0)$  die Aussage  $\omega(0) = 0$ . Weiterhin ist  $A = F'(0)$  ein linearer Operator. Somit folgt weiter wegen  $A\xi = F'(0)\xi = A\xi + \omega'(0)\xi$ , dass  $\omega'(0) = 0$  und schließlich  $F''(0) = \omega''(0)$  ist. Andererseits erhalten wir nach der Konstruktion des Bifurkationssystem (siehe den Beweis von Lemma 6), dass  $A \in Iso(W, R)$  gilt. Wir werden jetzt zeigen, dass wir analog zu den früheren Untersuchungen den Satz über implizite Funktionen aus dem Abschnitt 4.2 auf die Gleichung

(18) anwenden können. Wir erhalten dann die lokale (eindeutige) Lösung  $w = w(t)$ , die zur Klasse  $C^2$  gehört und die Bedingungen  $w(0) = 0$  und  $w'(0) = 0$  erfüllt:

Die Gleichung (18) entspricht der impliziten Gleichung  $G(w, t) = 0$  mit  $G(0, 0) = A0 + Q\omega(0) = 0$  und

$$G_w(0, 0)u = Au + Q\omega'(0)u = Au, \quad G_t(0, 0)v = [Q\omega'(0)\varphi]v = 0.$$

Somit folgt nach dem Satz über implizite Funktionen

$$G(w, t) = G(t, w(t)) = 0,$$

wobei

$$w(0) = 0 \quad \text{und} \quad w'(0) = -[G_w(0, 0)]^{-1} \circ G_t(0, 0) = 0$$

gilt.

Setzen wir diese Ergebnisse in (19) ein, so müssen wir entsprechend der Definition der Projektion  $P$  wegen  $z \neq 0$  nur noch die Gleichung

$$\chi(t) = \langle \psi, \omega(t\varphi + w(t)) \rangle = s$$

lösen. Da  $w(\cdot)$  und  $\omega(\cdot)$  zur Klasse  $C^2$  gehören, gilt das natürlich auch für  $\chi(\cdot)$ . Setzen wir jetzt

$$x_t := t\varphi + w(t),$$

so erhalten wir mittels Kettenregel

$$\begin{aligned} \chi'(t) &= \langle \psi, \omega'(x_t)[\varphi + w'(t)] \rangle, \\ \chi''(t) &= \langle \psi, \omega''(x_t)[\varphi + w'(t), \varphi + w'(t)] \rangle + \langle \psi, \omega'(x_t)[w''(t)] \rangle. \end{aligned}$$

Da  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega'(0) = 0$  und  $\omega''(0) = F''(0)$  erfüllt ist, folgt hieraus unter Verwendung der Voraussetzungen schließlich

$$\chi'(0) = 0, \quad \chi''(0) = \langle \psi, F''(0)[\varphi, \varphi] \rangle > 0.$$

Damit ist aber das Lemma bewiesen. ■

Um das wichtigste Ergebnis in diesem Abschnitt herleiten zu können, benötigen wir noch das folgende Resultat, das uns eine globale Aussage über die Anzahl der Lösungen ermöglichen wird.

**Lemma 10** *Es sei  $F \in C^2(X, Y)$  eine eigentliche Abbildung. Für  $y \in F(\Sigma')$  gelte  $F^{-1}(y) = \{x\}$ ,  $x \in \Sigma'$ . Dann existiert für jede Umgebung  $U = U(x) \subset X$  eine Umgebung  $V = V(F(x)) \subset Y$  mit  $F^{-1}(V) \subset U$ .*

**Beweis:** Wir nehmen indirekt an, dass derartige Umgebungen  $U$  und  $V$  nicht existieren. Somit haben wir eine Umgebung  $U^* = U^*(x)$  und eine Folge  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  mit  $x_n \notin U^*$  und  $F(x_n) \rightarrow F(x)$ . Da  $F$  jedoch eine eigentliche Abbildung ist, haben wir andererseits  $x_n \rightarrow x^* \notin U^*$  und  $F(x) = F(x^*)$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung  $F^{-1}(y) = \{x\}$ . ■

Damit sind wir jetzt in der Lage, das Hauptresultat zu beweisen. Dieses wenden wir im nächsten Abschnitt auf verschiedene Klassen von semilinearen Randwertproblemen an, um Aussagen über die Lösungsstruktur und die Anzahl von Lösungen herleiten zu können.

**Satz 6** *Es sei  $F \in C^2(X, Y)$  eine eigentliche Abbildung. Weiterhin sei  $\Sigma'$  zusammenhängend, alle  $x \in \Sigma'$  seien gewöhnliche singuläre Punkte, und für alle  $y \in F(\Sigma')$  hat  $F(x) = y$  genau eine Lösung.*

*Dann existieren zwei offene zusammenhängende Teilmengen  $Y_0$  und  $Y_2$  derart, dass*

- (i)  $Y = Y_0 \cup Y_2 \cup F(\Sigma')$  und
- (ii) die Anzahl der Lösungen von  $F(x) = y$  ist durch

$$\#y = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \in Y_0, \\ 1 & \text{falls } y \in F(\Sigma'), \\ 2 & \text{falls } y \in Y_2 \end{cases}$$

*gegeben.*

**Beweis:** Aus Lemma 8 folgt zunächst, dass die Menge  $F(\Sigma')$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit Kodimension 1 in  $Y$  ist. Da  $\Sigma'$  abgeschlossen ist und  $F$  eine eigentliche Abbildung ist, folgt die Abgeschlossenheit von  $F(\Sigma')$ . Nach unseren Voraussetzungen ist  $\Sigma'$  und damit auch  $F(\Sigma')$

zusammenhängend. Somit besteht wegen Lemma 5 die Menge  $Y \setminus F(\Sigma')$  aus höchstens zwei zusammenhängenden Komponenten. Es sei jetzt  $x^* \in \Sigma'$  fixiert. Wir wählen jetzt gemäß Lemma 9 eine Kugel  $U = B_\varepsilon(x^*)$ . Wenden wir jetzt auf diese Kugel  $U$  unser Lemma 10 an, so ist für alle  $y \in V = V(F(x^*))$  die Zahl  $\#y$  gleich der „lokalen Anzahl“ der Lösungen von  $F(x) = y$ , wobei **nur noch**  $x \in U$  gelten muss. Diese Zahl kann jedoch mittels Lemma 9 berechnet werden: Es gilt entweder  $\#y = 0$  oder  $\#y = 2$  („oberhalb/unterhalb“ von  $F(\Sigma')$ ). Weiterhin ist nach Satz 2 die Anzahl  $\#y$  auf jeder der Komponenten von  $Y \setminus F(\Sigma')$  konstant. Somit muss (i), d.h.,  $Y = Y_0 \cup Y_2 \cup F(\Sigma')$  sowie (ii) gelten. ■

## 6 Bifurkationssätze und Anwendungen auf nichtlineare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit der Untersuchung von speziellen Klassen von semilinearen Randwertproblemen mit **asymptotisch linearen Nichtlinearitäten** im sogenannten *Resonanzfall*, wobei wir unseren globalen Inversionssatz aus dem letzten Abschnitt sowie die bereits eingeführte Lyapunov–Schmidt-Methode verwenden werden. Anschließend behandeln wir im Abschnitt 6.2 — unter Verwendung unseres Satzes 6 aus dem Kapitel 5 und der iterativen *Methode von Ober- und Unterlösungen* — sogenannte *Nichtlinearitäten mit Sprüngen* (*jumping nonlinearities*). Wie bisher bezeichnen wir mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes und glattes Gebiet mit Rand  $\partial\Omega$ .

### 6.1 Der Resonanz-Fall

Wir betrachten das semilineare elliptische Randwertproblem

$$\Delta u + g(u) = h \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (1)$$

wobei die nichtlineare Funktion  $g$  asymptotisch linear ist und  $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  gilt. Wir setzen dabei voraus, dass die Funktion  $g$  durch

$$g(\tau) = a\tau + b(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

darstellbar ist, wobei  $a$  reell und die Funktion  $b \in C^1(\mathbb{R})$  beschränkt ist.

Wie üblich bezeichnet  $\lambda_k$  den  $k$ -ten Eigenwert von

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Im folgenden unterscheiden wir die Fälle  $a = \lambda_k$  (*Resonanz-Fall*) und  $a \neq \lambda_k$  (*Nichtresonanz-Fall*) für alle  $k$ .

Wir beginnen mit dem Nichtresonanz-Fall. Dann gilt folgendes klassisches Ergebnis.

**Satz 1 (Hammerstein)** *Falls  $a \neq \lambda_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt und die Funktion  $b$  Lipschitz-stetig und beschränkt, so hat das Problem (1) für jedes beliebige  $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  eine klassische Lösung  $u \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .*

Ein Beweis, der im wesentlichen *a priori-Abschätzungen* verwendet, kann im Buch Runst/Sickel gefunden werden.

Unser Ziel besteht jedoch darin, ein Existenz- und Unitätsresultat für die Lösbarkeit von (1) mittels des globalen Inversionsatzes, siehe Satz 4 aus dem letzten Kapitel, herzuleiten. Zu diesem Zweck setzen wir

$$X = C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad Y = C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

und definieren die zu (1) korrespondierende Abbildung

$$F : X \rightarrow Y, \quad F(u) = \Delta u + au + b(u),$$

die offensichtlich stetig ist.

Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  eigentlich ist. Dazu verwenden wir wesentlich folgende *a priori-Abschätzung* für die Lösungen von (1).

**Lemma 1** *Es gelte  $a \neq \lambda_k$  für alle  $k$ . Falls  $b(\cdot)$  beschränkt ist, und ein  $C > 0$  existiert mit  $\|h_n|Y\| \leq C$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , so gilt für die Lösungen  $u_n \in X$  mit  $F(u_n) = h_n$ , dass  $\|u_n|Y\| \leq M$  für alle  $n$  erfüllt ist, wobei die Zahl  $M > 0$  geeignet gewählt wird.*

**Beweis:** Wir nehmen indirekt an, dass es keine derartige Zahl  $M > 0$  gibt. Wir definieren jetzt

$$z_n = \frac{u_n}{\|u_n|Y\|}.$$

Dann ist (1) nach den Bedingungen an die Funktion  $g(\tau) = a\tau + b(\tau)$  äquivalent zu

$$\Delta z_n + az_n = -\frac{b(u_n)}{\|u_n|Y\|} + \frac{h_n}{\|u_n|Y\|} \quad \text{in } \Omega, \quad z_n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2)$$

Nach den Voraussetzungen ist die rechte Seite der Differentialgleichung auf  $\Omega$  beschränkt. Außerdem gilt

$$-\frac{b(u_n)(x)}{\|u_n|Y\|} + \frac{h_n(x)}{\|u_n|Y\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Da  $a \neq \lambda_k$  gilt, existieren nach den Ergebnissen aus dem 2. Abschnitt eindeutige Lösungen  $z_n \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$  mit  $\|z_n|C^{1+\alpha}\| \leq C_1$  für alle  $n$ . Aus der kompakten Einbettung

$$C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$$

ergibt sich weiter (eventuell für eine Teilfolge), dass wir annehmen können, dass ein  $z^* \in C^1(\overline{\Omega})$  mit  $z_n \rightarrow z^*$  in  $C^1(\overline{\Omega})$ . Wegen  $\|z_n|Y\| = 1$  folgt, dass  $z^* \neq 0$  gilt.

Multiplizieren wir jetzt Gleichung (2) mit einer beliebigen Funktionen  $w \in C_0^\infty(\Omega)$ , so erhalten wir mittels Integration

$$-\int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla z_n(x) dx + a \int_{\Omega} w(x) z_n(x) dx = \int_{\Omega} w(x) \left( -\frac{b(u_n)(x)}{\|u_n|Y\|} + \frac{h_n(x)}{\|u_n|Y\|} \right) dx. \quad (4)$$

Unter Berücksichtigung von (3) ergibt sich durch Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ , dass

$$-\int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla z^*(x) dx + a \int_{\Omega} w(x) z^*(x) dx = 0. \quad (5)$$

Das bedeutet, dass diese nichttriviale Funktion  $z^*$  zunächst eine schwache, und damit nach den Abbildungseigenschaften auch eine klassische Lösung des Eigenwertproblems mit  $a \neq \lambda_k$  ist. Das ist jedoch ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung. ■

Damit sind wir in der Lage nachzuweisen, dass die oben definierte Abbildung eigentlich ist.

**Lemma 2** *Die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  ist eigentlich.*

**Beweis:** Es gelte  $h_n \rightarrow h$  in  $Y$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $u_n \in X$  mit  $F(u_n) = h_n$ . Verwenden wir Lemma 1, so existiert eine Zahl  $C > 0$ , so dass  $\|u_n|Y\| \leq C$  erfüllt ist. Unter Verwendung der üblichen bootstrap- und Kompaktheitsargumente folgt aber hieraus (eventuell für eine Teilfolge) die Existenz einer Funktion  $u^* \in X$  mit  $u_n \rightarrow u^*$  in  $X$ . Damit ist aber die Aussage bewiesen. ■

Um den globalen Inversionssatz anwenden zu können, müssen wir noch die **lokale** Invertierbarkeit von  $F$  im gesamten Banachraum  $X$  zeigen. Dazu benötigen wir zusätzlich zu unserer Glattheitsbedingung  $b \in C^1(\mathbb{R})$ , dass *entweder*

$$a + b'(\tau) < \lambda_1 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R} \quad (6)$$

oder

$$\lambda_k < a + b'(\tau) < \lambda_{k+1} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R} \quad (7)$$

erfüllt ist. Die Bedingungen (6) bzw. (7) gewährleisten, dass

$$g'(\mathbb{R}) \cap \sigma_D(-\Delta) = \emptyset$$

gilt, wobei  $\sigma_D(-\Delta) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  das Spektrum von  $-\Delta$  unter homogener Dirichlet-Bedingung bezeichnet. Insbesondere ist wegen (7) der Eigenwert  $\lambda_k$  einfach. Weiterhin bezeichnet im folgenden  $\varphi_k$  eine *nichttriviale Eigenfunktion* zum Eigenwert  $\lambda_k$ . Wir wissen, dass  $F \in C^1(X, Y)$  mit

$$F'(u)v = \Delta v + av + b'(u)v$$

gilt.

**Lemma 3** *Die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  ist lokal invertierbar.*

**Beweis:** Es sei  $u \in X$ . Dann setzen wir

$$m(x) = a + b'(u(x)), \quad x \in \Omega.$$

Unter Verwendung von (6) bzw. (7) folgt

$$m < \lambda_1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_k < m < \lambda_{k+1},$$

und damit nach der Monotonie der Eigenwerte, siehe Satz 9(ii)(a) im Abschnitt 2.4,

$$\lambda_1(m) > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_k(m) < 1 < \lambda_{k+1}(m).$$

Somit hat das lineare Randwertproblem

$$-\Delta v = 1 \cdot mv \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

nur die triviale Lösung  $v \equiv 0$ . Unter Verwendung von Satz 10(i) im Abschnitt 2.4 folgt aber hieraus, dass die  $C^1$ -Abbildung

$$F'(u)v = \Delta v + m(x)v$$

invertierbar in  $X$  ist. ■

Damit sind wir in der Lage, mittels globalen Inversionssatz das nächste Ergebnis abzuleiten.

**Satz 2** Für die Funktion  $b \in C^1(\mathbb{R})$  existiere eine positive Zahl  $M$ , so dass  $|b(\tau)| \leq M$  für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  gelte. Weiterhin sei entweder (6) oder (7) erfüllt. Dann hat unser Problem (1) für jede Funktion  $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  eine eindeutig bestimmte klassische Lösung  $u \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Wir betrachten jetzt das interessantere Problem, wenn der Resonanz-Fall vorliegt. Falls  $a = \lambda_k$  gilt, so kann das Problem (1) wegen  $g(\tau) = \lambda_k \tau + b(\tau)$  in der Form

$$\Delta u + \lambda_k u + b(u) = h \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (8)$$

geschrieben werden, das man in der Literatur gewöhnlich als *Resonanz-Problem* bezeichnet. Offensichtlich ist im allgemeinen **nicht** gewährleistet, dass (8) überhaupt eine Lösung besitzt. Dazu wählen wir z.B.  $b \equiv 0$ . Dann sagt uns die Fredholm-Alternative, siehe Satz 10(ii) im Abschnitt 2, dass die Bedingung

$$\int_{\Omega} h(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

erfüllt sein muss. Dabei haben  $\lambda_k$  und  $\varphi_k$  die übliche Bedeutung. Man kann nun die Bedingung für die *Nichtexistenz einer Lösung* von (8) mit  $b \equiv 0$ , die durch

$$\int_{\Omega} h(x) \varphi_k(x) dx \neq 0 \quad (9)$$

gegeben ist, relativ einfach auf den hier vorliegenden nichtlinearen Fall ausdehnen.

Dazu definieren wir für fixiertes  $\varphi_k$  die Mengen

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : \varphi_k(x) > 0\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega : \varphi_k(x) < 0\} \quad (10)$$

sowie

$$b^- = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} b(\tau), \quad b^+ = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} b(\tau). \quad (11)$$

**Satz 3** Es sei  $\lambda_k$  ein einfacher Eigenwert. Falls die Funktion  $b(\cdot)$  beschränkt ist, so ist

$$\begin{aligned} b^- \int_{\Omega^+} \varphi_k(x) dx + b^+ \int_{\Omega^-} \varphi_k(x) dx &\leq \int_{\Omega} \varphi_k(x) h(x) dx \\ &\leq b^+ \int_{\Omega^+} \varphi_k(x) dx + b^- \int_{\Omega^-} \varphi_k(x) dx \end{aligned} \quad (12)$$

eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (8).

**Beweis:** Wir nehmen an, dass  $u$  eine Lösung von (8) ist. Multiplizieren wir jetzt die Gleichung mit  $\varphi_k$  und integrieren anschließend, so erhalten wir

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi_k(x) dx + \lambda_k \int_{\Omega} u(x) \varphi_k(x) dx + \int_{\Omega} b(u(x)) \varphi_k(x) dx = \int_{\Omega} h(x) \varphi_k(x) dx.$$

Wir wissen, dass  $\Delta\varphi_k + \lambda_k\varphi_k = 0$  gilt. Somit erhalten wir

$$\int_{\Omega} b(u(x))\varphi_k(x)dx = \int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x)dx$$

und damit die Aussage. ■

**Bemerkung 1** (i) Die obige notwendige Bedingung bleibt richtig, falls man  $\varphi_k$  durch  $-\varphi_k$  ersetzt. Sie stimmt im Fall  $b \equiv 0$  mit der bekannten Lösbarkeitsbedingung im linearen Fall überein.

(ii) Es ergibt sich die Frage, ob unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Funktion  $g$  die Bedingung (12) auch hinreichend ist für die Lösbarkeit von (8). Ergebnisse in dieser Richtung, die man in der heutigen Literatur meist als Resultate vom Landesman–Lazer-Typ zusammenfasst, wurden erstmals durch E.M. Landesman und A.C. Lazer (1972) bewiesen. Sie sind Beispiele für die sogenannte *Fredholm-Alternative für asymptotisch lineare Operatoren*, siehe zum Beispiel S.I. Pohozaev (1967), J. Nečas (1969).

(iii) Wir wollen diese Theorie nicht in ihrem allgemeinsten Fall untersuchen. Deshalb setzen wir im folgenden stets voraus, dass der Eigenwert  $\lambda_k$  stets *einfach* ist und die zu den Bedingungen (6) und (7) korrespondierenden Einschränkungen

$$\lambda_1 + b'(\tau) < \lambda_2 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R} \tag{13}$$

oder

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k + b'(\tau) < \lambda_{k+1} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R} \tag{14}$$

erfüllt sind. Die Bedingungen (13) bzw. (14) gewährleisten wieder, dass die Menge

$$g'(\mathbb{R}) \cap \sigma_D(-\Delta)$$

nur einen Eigenwert enthält. Es liegt also nur *einfache Resonanz*.

Im weiteren sei  $\lambda_k$  ein einfacher Eigenwert und  $\varphi_k$  eine zugehörige nichttriviale Eigenfunktion. Dann können wir folgende Zerlegung von  $X$  bezüglich des inneren Produktes  $(\cdot, \cdot)$  in  $L_2$  vornehmen.

$$X = V \oplus W,$$

wobei

$$V = \mathbb{R}\varphi_k, \quad W = \{w \in X : (w, \varphi_k) = \int_{\Omega} w(x)\varphi_k(x)dx = 0\}.$$

Damit lässt sich jedes  $u \in X$  in eindeutiger Weise in der Form

$$u = t\varphi_k + w, \quad t = (u, \varphi_k), \quad w \in W,$$

darstellen. Mittels dieser Zerlegung erhalten wir aus (8) unter Verwendung von  $\Delta\varphi_k = -\lambda_k\varphi_k$  das äquivalente Problem

$$\Delta w + \lambda_k w + b(t\varphi_k + w) = h. \quad (15)$$

Wir wollen jetzt zur Lösung wieder das Lyapunov–Schmidt-Verfahren anwenden, das wir bereits aus dem letzten Kapitel kennen. Dabei bezeichnet  $P$  die Projektion auf  $W$  und  $Q$  die auf  $V$ , d.h., wir haben

$$Pu = w = \text{id } u - Qu = u - (u, \varphi_k)\varphi_k, \quad Pw = w.$$

Somit geht (15) in das Bifurkationssystem

$$\Delta w + \lambda_k w + Pb(t\varphi_k + w) = Ph, \quad (16)$$

$$(b(t\varphi_k + w), \varphi_k) = (h, \varphi_k) \quad (17)$$

über.

Für die Lösung der Gleichung (16) (invertierbarer Anteil) können wir die gleiche Methode wie im Nichtresonanz-Fall anwenden. Dabei sei die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times W \rightarrow Y \cap W$$

durch

$$\Phi(t, w) = \Delta w + \lambda_k w + Pb(t\varphi_k + w)$$

definiert.

**Lemma 4** *Für die Funktion  $b \in C^1(\mathbb{R})$  existiere eine positive Zahl  $M$ , so dass  $|b(\tau)| \leq M$  für alle reellen  $\tau$  ist. Weiterhin gelte entweder (13) oder (14). Dann existiert für jedes fixierte  $h \in Y$  ein eindeutig bestimmtes  $w = w(t)$  mit*

(i)  $\Phi(t, w(t)) = Ph,$

(ii) *die Abbildung  $t \rightarrow w(t)$  gehört zur Klasse  $C^1$ , und*

(iii) *es existiert eine positive Zahl  $C$  derart, so dass die a priori- Abschätzung  $\|w(t)\|_X \leq C$  für alle  $t$  gilt.*

**Beweis:** 1. *Schritt* Wir wenden den globalen Inversionssatz auf  $\Phi(t, \cdot)$  an, um die Aussagen (i) und (ii) herleiten zu können. Analog zum Beweis von Lemma 2 zeigt man, dass die Abbildung  $w \rightarrow \Phi(t, w)$  eigentlich ist. Um die Invertierbarkeit von  $\Phi_w(t, w)$  auf  $W$  nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass das lineare homogene Problem

$$\Delta z + \lambda_k z + Pb'(t\varphi_k + w)z = 0, \quad z \in W, \quad (18)$$

nur die triviale Lösung  $z \equiv 0$  hat. Definieren wir

$$m(x) = b'(t\varphi_k(x) + w(x)),$$

so folgt

$$Pb'(t\varphi_k + w)z = Pmz = mz - (mz, \varphi_k)\varphi_k,$$

und damit geht (18) über in

$$\Delta z + (\lambda_k + m)z - (mz, \varphi_k)\varphi_k = 0, \quad z \in W. \quad (19)$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass (14) gilt. Der Beweis unter Verwendung von (13) erfolgt analog. Wir setzen

$$X = W_1 \oplus V \oplus W_2, \quad W_1 = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\}, \quad W_2 = \text{span}\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots\}, \quad V = \mathbb{R}\varphi_k.$$

Damit erhalten wir wegen  $W = W_1 \oplus W_2$  die eindeutige Zerlegung von  $z \in W$  mit

$$z = z_1 + z_2, \quad z_i \in W_i, \quad z_1 \perp z_2, \quad z_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \varphi_i, \quad z_2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} \beta_i \varphi_i$$

Multiplizieren wir jetzt (19) mit  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ , und integrieren anschließend, so erhalten wir wegen  $(z_i, \varphi_k) = 0$

$$(z_i, \Delta z) + \lambda_k(z_i, z) + (z_i, mz) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Wegen  $z = z_1 + z_2$ , und  $\Delta z_i \in W_i$ ,  $i = 1, 2$ , und damit  $(z_1, z_2) = (z_1, \Delta z_2) = (z_2, \Delta z_1) = 0$  folgt für  $i = 1, 2$

$$- \int_{\Omega} |\nabla z_i(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\lambda_k + m(x))z_i^2(x) dx + \int_{\Omega} m(x)z_1(x)z_2(x) dx = 0$$

und damit

$$- \int_{\Omega} |\nabla z_1(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\lambda_k + m(x))z_1^2(x) dx = - \int_{\Omega} |\nabla z_2(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\lambda_k + m(x))z_2^2(x) dx. \quad (20)$$

Falls  $z \neq 0$ , so erhalten wir aus (20) unter Berücksichtigung der Bedingung (14), dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla z_2(x)|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla z_1(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} (\lambda_k + m(x))(z_2^2(x) - z_1^2(x)) dx \\ &< \lambda_{k+1} \int_{\Omega} z_2^2(x) dx - \lambda_{k-1} \int_{\Omega} z_1^2(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Nach Konstruktion gilt  $(z_2, \varphi_i) = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, k$ . Damit ergibt sich aus der Definition von  $\lambda_{k+1}$  mittels eines Variationsproblems, siehe Satz 9(iii), dass

$$\int_{\Omega} |\nabla z_2(x)|^2 dx \geq \lambda_{k+1} \int_{\Omega} z_2^2(x) dx. \quad (22)$$

Andererseits folgt aus

$$z_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \varphi_i,$$

dass

$$\int_{\Omega} |\nabla z_1(x)|^2 dx \leq \lambda_{k-1} \int_{\Omega} z_1^2(x) dx \quad (23)$$

gelten muss. Damit ergibt sich aber aus der Differenz von (22) und (23) ein Widerspruch zu (21). Somit war also unsere Annahme  $z \not\equiv 0$  falsch, und wir haben gezeigt, dass (18) nur die triviale Lösung  $z \equiv 0$  besitzt. Damit ist also die Abbildung  $\Phi_w$  invertierbar, und wir können den globalen Inversionssatz anwenden. Somit folgen die Aussagen (i) und (ii) aus Satz 4 im Kapitel 5.

2. *Schritt* Wir zeigen (iii). Es sei  $w(t) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  eine Lösung von (16). Da die Funktion  $b(\cdot)$  beschränkt ist, folgt unter Verwendung der linearen Theorie, dass Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  existieren mit  $\|w(t)\|_{C^{1+\alpha}} \leq c_1$  und somit  $\|Ph - Pb(t\varphi_k + w)\|_Y \leq c_2$  für alle  $t$ . Mittels bootstrap arguments ergibt sich schließlich (iii). ■

Wir müssen uns jetzt noch mit der Lösbarkeit von (17) beschäftigen. Der Vorteil besteht aber darin, dass dieser nichtinvertierbare Teil in einem eindimensionalen Raum untersucht wird. Dazu setzen wir

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} b(t\varphi_k(x) + w(t)(x))\varphi_k(x) dx.$$

Aus dem letzten Lemma folgt zunächst die Stetigkeit von  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine a priori Abschätzung für die Funktion  $w$ . Weiterhin ist jetzt für die Lösbarkeit von (8) nach dem obigen Bifurkationsproblem ausreichend, die Gleichung (17) zu lösen, d.h., wir betrachten das *eindimensionale* Problem

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Wir werden jetzt zeigen, dass das asymptotische Verhalten von  $\Gamma(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  in enger Beziehung zu dem von  $b(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  steht.

Dabei setzen wir jetzt voraus, dass für die Funktion  $b$  folgende endliche Grenzwerte **existieren**:

$$b(\tau) \rightarrow b^{\pm} \quad \text{für } \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (25)$$

Dann definieren wir (in Analogie zum Satz 3)

$$A_- = b^- \int_{\Omega^+} \varphi_k(x) dx + b^+ \int_{\Omega^-} \varphi_k(x) dx, \quad A_+ = b^+ \int_{\Omega^+} \varphi_k(x) dx + b^- \int_{\Omega^-} \varphi_k(x) dx. \quad (26)$$

Es soll weiterhin  $A_- < A_+$  gelten. Damit sind wir in der Lage, folgendes Resultat zu beweisen.

**Satz 4** *Es sei  $\lambda_k$  ein einfacher Eigenwert und  $\varphi_k$  die zugehörige nichttriviale Eigenfunktion. Für die Funktion  $b \in C^1(\mathbb{R})$  existiere eine positive Zahl  $M$ , so dass  $|b(\tau)| \leq M$  für alle reellen  $\tau$  ist. Weiterhin gelte entweder (13) oder (14) sowie (25). Dann hat das semilineare Randwertproblem (8) eine Lösung, falls folgende Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist.*

$$A_- < \int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x)dx < A_+. \quad (27)$$

**Beweis:** Wir zeigen jetzt, dass  $\Gamma(t) \rightarrow A_{\pm}$  für  $t \rightarrow \pm$  gilt. Da  $\Gamma$  stetig ist, folgt dann aus  $A_- < A_+$  die Existenz einer reellen Zahl  $t^*$  für die Lösbarkeit von (24).

Es gelte  $t_n \rightarrow +\infty$ . Dann erhalten wir die Lösungen  $w_n = w(t_n)$ , die nach Lemma 4 existieren und der a priori-Abschätzung (Lemma 4(iii))

$$\|w_n|X\| \leq C, \quad n \in \mathbb{N},$$

genügen. Verwenden wir jetzt die kompakte Einbettung

$$C^\alpha(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

so können wir annehmen, dass  $w_n(x) \rightarrow w^*(x)$  gleichmäßig auf  $\Omega$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt (eventuell für eine Teilfolge). Damit folgt aus der Definition von  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$ , dass

$$t_n\varphi_k(x) + w_n(x) \rightarrow \pm\infty \quad \text{für alle } x \in \Omega^\pm.$$

Da nach Voraussetzung die Funktion  $b$  beschränkt ist, folgt mittels des Satzes von Lebesgue, dass

$$\begin{aligned} \Gamma(t_n) &\rightarrow b^+ \int_{\Omega^+} \varphi_k(x)dx + b^- \int_{\Omega^-} \varphi_k(x)dx = A_+ \quad \text{für } t_n \rightarrow +\infty, \\ \Gamma(t_n) &\rightarrow b^- \int_{\Omega^+} \varphi_k(x)dx + b^+ \int_{\Omega^-} \varphi_k(x)dx = A_- \quad \text{für } t_n \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Da unsere Funktion  $\Gamma$  stetig ist, hat (24) eine Lösung  $t^*$ , falls die notwendige Bedingung (27) erfüllt ist. Die entsprechende Lösung von (8) ist somit durch

$$u^*(x) = t^*\varphi_k(x) + w(t^*)(x)$$

gegeben. ■

**Bemerkung 2** (i) Die Bedingungen (13) bzw. (14) sowie die Einschränkung, dass  $\lambda_k$  nur einfacher Eigenwert ist, kann in folgender Weise abgeschwächt werden. Für beliebige  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i < k$ , gelte

$$\lambda_i < c_1 \leq \lambda_k + b'(\tau) \leq c_2 < \lambda_j \quad (28)$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R}$ . In diesem Falle ersetze man  $V = \mathbb{R}\varphi$  durch

$$V = \text{span}\{\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_{j-1}\}$$

und verwende dann wegen  $X \subset L_2(\Omega)$ ,  $Y \subset L_2(\Omega)$  die orthogonale Darstellung bezüglich des  $L_2$ -Produktes  $X = V \oplus W$ . Auf  $X$  und  $Y$  führt man dann die Projektionen  $P$  und  $Q$  ein, so dass dann für  $u \in X$  die eindeutige Zerlegung

$$u = v + w, \quad v = Qu \in V, \quad w = Pu \in W$$

und für  $h \in Y$  die Darstellung  $h = Ph + Qh$  gelte. Damit lässt sich in diesem Fall das Randwertproblem (8) mittels der Projektionen  $P$  und  $Q$  in das äquivalente Bifurkationssystem

$$\begin{aligned} PF(v + w) &= Ph, \\ QF(v + w) &= Qh \end{aligned}$$

umformulieren. Jetzt kann analog zu oben die erste Gleichung (invertierbares Problem auf  $W$ ) eindeutig in der Form  $w = w(v)$  gelöst werden. Damit muss, entsprechend der zweiten Gleichung, noch das nichtinvertierbare Problem in dem *endlich-dimensionalen* Raum  $V$  gelöst werden. Dafür gibt es in der Literatur entsprechende Methoden innerhalb der Landesman–Lazer-Theorie, die auf der topologischen Methode des *Leray–Schauder–Abbildungsgrades* beruhen. Es gibt sogar eine abstrakte Lösbarkeitsbedingung (*verallgemeinerte Landesman–Lazer-Bedingung*), die sogar auf beschränkte Nichtlinearitäten, sublineare Nichtlinearitäten, spezielle Nichtlinearitäten mit linearem sowie superlinearem Wachstum angewendet werden kann.

(ii) Weiterhin gibt es die sogenannte Methode der *Unter- und Oberlösungen*, um die Lösung eines Resonanz-Problems iterativ zu bestimmen. Hierbei wird wesentlich das *Maximum-Prinzip* verwendet.

(iii) Es ist nicht schwierig, Nichtlinearitäten  $b$  anzugeben, für die die Lösbarkeitsbedingung (27) für **keine** rechte Seite  $h$  erfüllt ist. Ein Prototyp ist

$$b(\tau) = \frac{\tau}{\tau^2 + 1},$$

da in diesem Fall  $b_{\pm} = 0$  gilt. Wir wollen uns jetzt mit solchen Nichtlinearitäten beschäftigen.

Wir geben ein Beispiel an, wo (27) nicht erfüllt ist und die bisherige Lösungsmethode modifiziert werden muss.

**Satz 5** *Wir setzen voraus, dass  $\lambda_k$  ein einfacher Eigenwert ist. Weiterhin erfülle die beschränkte Funktion  $b \in C^1(\mathbb{R})$  die Voraussetzungen von Satz 2. Außerdem nehmen wir an, dass*

$$\tau b(\tau) \rightarrow \sigma > 0 \quad \text{für} \quad |\tau| \rightarrow \infty. \tag{29}$$

Dann ist das Problem (1) lösbar, falls

$$\int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x)dx = 0$$

gilt.

**Beweis:** Wegen (25) und (29) gilt zunächst  $b_{\pm} = 0$ . In Analogie zum Beweis des letzten Satzes, siehe insbesondere (24), müssen wir wegen

$$\int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x)dx = 0$$

nur noch die Gleichung  $\Gamma(t) = 0$  lösen. Unter Verwendung von (29) betrachten wir aber jetzt  $t\Gamma(t)$ . Dabei verwenden wir folgende äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} t\Gamma(t) &= \int_{\Omega} b(t\varphi_k(x) + w(t)(x))(t\varphi_k(x) + w(t)(x))dx \\ &\quad - \int_{\Omega} b(t\varphi_k(x) + w(t)(x))w(t)(x)dx. \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt das Verhalten von  $t\Gamma(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$ . Es sei  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  eine reelle Folge mit  $|t_n| \rightarrow \infty$ . Setzen wir jetzt  $u_n = u_n(t_n) = t_n\varphi_k + w_n$  mit der eindeutigen Lösung  $w_n = w_n(t_n)$ , so erhalten wir analog zu früher die Existenz von  $w^*$  mit  $w_n \rightarrow w^*$  gleichmäßig auf  $\Omega$ . Definieren wir jetzt  $\Omega' = \Omega^+ \cup \Omega^-$ , wobei wie vorher

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : \varphi_k(x) > 0\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega : \varphi_k(x) < 0\},$$

so gilt  $u_n(x) = w_n(x)$  für alle  $x \notin \Omega'$ , und damit

$$t_n\Gamma(t_n) = \int_{\Omega'} b(u_n(x))u_n(x)dx - \int_{\Omega'} b(u_n(x))w_n(x)dx.$$

Da analog zu früher die Funktionen  $w_n$  beschränkt sind, folgt für alle  $x \in \Omega'$

$$|u_n(x)| = |t_n\varphi_k(x) + w_n(x)| \rightarrow \infty \quad \text{für } |t_n| \rightarrow \infty.$$

Damit erhalten wir wegen (29), dass

$$\int_{\Omega'} b(u_n(x))u_n(x)dx \rightarrow \sigma|\Omega'|. \quad (30)$$

Andererseits folgt aus  $b(t) \rightarrow 0$  für  $|t| \rightarrow \infty$  und der a priori-Abschätzung für  $w_n$

$$\int_{\Omega'} b(u_n(x))w_n(x)dx \rightarrow 0, \quad (31)$$

so dass sich unter Verwendung von (30) und (31) schließlich

$$t_n\Gamma(t_n) \rightarrow \sigma|\Omega'|$$

ergibt. Offensichtlich ist wegen  $|\Omega'| > 0$  dieser Limes auch positiv. Da die Funktion  $\Gamma(\cdot)$  stetig ist, existiert somit mindestens eine reelle Zahl  $t$  mit  $\Gamma(t) = 0$ .

Damit ist aber das Satz bewiesen. ■

**Bemerkung 3** Bei einer genauen Betrachtung des letzten Beweises erkennt man leicht, dass man folgendes Resultat für die Existenz von mindestens **zwei** Lösungen für (1) herleiten kann: In Abhängigkeit von  $Ph$  existiert eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  derart, dass (1) mindestens zwei Lösungen hat, falls

$$0 < \left| \int_{\Omega} h(x)\varphi_k(x)dx \right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Abschließend beschäftigen wir uns mit einer Unitätsaussage für (1) im Falle, dass  $\lambda_k = \lambda_1$  gilt.

**Satz 6** Die Funktion  $b$  erfülle die Bedingungen von Satz 4 im Falle  $k = 1$ . Weiterhin gelte  $b'(\tau) \neq 0$  für alle reellen  $\tau$ , z.B. sei  $b'(\tau) > 0$  für alle  $\tau$ . Dann hat (1) eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  genau dann, wenn

$$b^- \int_{\Omega} \varphi_1(x)dx < \int_{\Omega} h(x)\varphi_1(x)dx < b^+ \int_{\Omega} \varphi_1(x)dx. \quad (32)$$

**Beweis:** Zunächst folgt aus den Eigenschaften der (positiven) Funktion  $\varphi_1$  und der Bedingung  $b'(\tau) > 0$  für alle  $\tau$ , dass die Bedingung (32) mit (12) übereinstimmt. Um nachzuweisen, dass (1) genau eine Lösung besitzt, müssen wir also unter Benutzung des Bifurkationssystems (16), (17) nur noch zeigen, dass die Funktion  $\Gamma(\cdot)$  in unserem Fall streng monoton wachsend ist. Nach Lemma 4(ii) ist die Funktion  $w = w(t)$  differenzierbar. Aus (16) folgt wegen

$$\Delta w + \lambda_1 w + Pb(t\varphi_1 + w) = Ph,$$

dass  $w'(t)$  die Differentialgleichung

$$\Delta w' + \lambda_1 w' + Pb'(t\varphi_1 + w)(\varphi_1 + w') = 0 \quad (33)$$

erfüllt. Die Funktion  $\Gamma = \Gamma(t)$  ist ebenfalls differenzierbar, und wir erhalten

$$\Gamma'(t) = \int_{\Omega} b'(t\varphi_1(x) + w(x))(\varphi_1(x) + w'(x))\varphi_1(x)dx.$$

Damit ergibt sich aus (33) wegen  $Pu = u - (u, \varphi_1)\varphi_1$

$$\Delta w' + \lambda_1 w' + b'(t\varphi_1 + w)(\varphi_1 + w') - \Gamma'(t)\varphi_1 = 0. \quad (34)$$

Wir nehmen jetzt indirekt an, dass eine reelle Zahl  $t^*$  existiert mit  $\Gamma'(t^*) = 0$ . Definieren wir dann

$$u^* = t^*\varphi_1 + w(t^*), \quad z^* = (u^*)' = \varphi_1 + w'(t^*),$$

so folgt aus (34) für  $t = t^*$  wegen  $\Gamma'(t^*) = 0$  und  $\Delta\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0$

$$\Delta z^* + \lambda_1 z^* + b'(u^*)z^* = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad z^* = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Somit ist  $z^*$  eine Lösung des Eigenwertproblem  $\Delta z^* + m^*z^* = 0$  mit homogener Dirichlet-Randbedingung, falls wir  $m^*(x) = \lambda_1 + b'(u^*(x))$  setzen. Wegen

$$0 = (w(t), \varphi_1) = (w'(t), \varphi_1)$$

ergibt sich

$$(z^*, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_1) = 1.$$

Damit ist  $z^*$  eine nichttriviale Lösung dieses Eigenwertproblems. Folglich muss eine natürliche Zahl  $k \geq 1$  existieren mit  $\lambda_k(m^*) = 1$ . Nach unseren Voraussetzungen haben wir  $m^* < \lambda_2$ . Verwenden wir wieder unsere Monotonie-Eigenschaften für die Eigenwerte aus Abschnitt 2.4, so folgt  $\lambda_2(m^*) > 1$ . Somit muss  $\lambda_1(m^*) = 1$  erfüllt sein. Damit gilt aber entweder  $z^* > 0$  in  $\Omega$  oder  $z^* < 0$  in  $\Omega$ . Wegen  $b' > 0$  auf  $\mathbb{R}$  und  $\varphi_1 > 0$  auf  $\Omega$ , folgt

$$|\Gamma'(t^*)| = \left| \int_{\Omega} b'(u^*(x))z^*(x)\varphi_1(x)dx \right| > 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von  $t^*$ . ■

## 6.2 Probleme mit asymmetrische Nichtlinearitäten

In diesem Abschnitt behandeln wir wieder das Problem (1), d.h.,

$$\Delta u + g(u) = h \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

jetzt jedoch unter der Bedingung, dass die Nichtlinearität  $g$  *verschiedene* Asymptoten  $g'(\tau)$  für  $\tau \rightarrow \pm$  hat. Wir nehmen hier an, dass die Funktion  $g \in C^2(\mathbb{R})$  die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

$$g(0) = 0, \quad g''(\tau) > 0 \quad \text{für alle reellen } \tau, \quad (35)$$

und es existieren die Grenzwerte  $g'(\pm\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} g'(\tau)$  mit

$$0 < g'(-\infty) < \lambda_1 < g'(+\infty) < \lambda_2. \quad (36)$$

Wie im letzten Abschnitt setzen wir wieder

$$X = C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad Y = C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Dann gehört die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$ , definiert durch  $F(u) = \Delta u + g(u)$  zur Klasse  $C^2(X, Y)$ . Wir werden jetzt zur Lösbarkeit von Problem (1) den Satz 6 aus Kapitel 5 verwenden, um ein Ergebnis über die Anzahl von Lösungen beweisen zu können, das auf A. Ambrosetti, A. Prodi (1972) zurückgeht. Wir zeigen zunächst, dass alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind.

**Lemma 5** *Die Abbildung  $F$  ist eigentlich.*

**Beweis:** Es sei wie üblich  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  eine Folge gegeben, so dass  $F(u_n) = h_n$  gilt, und die rechten Seiten  $h_n$  in  $Y$  gleichmäßig beschränkt sind. Wir müssen nach der Definition der Eigenschaft eigentliche Abbildung und unter Beachtung von Lemma 2 im Abschnitt 6.1 zeigen, dass eine Zahl  $M > 0$  existiert, so dass

$$\|u_n|_Y\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt. Beim Beweis verwenden wir im wesentlichen die gleichen Argumente wie in Lemma 1 im Abschnitt 6.1. Wir nehmen also indirekt an, dass  $\|u_n|_Y\| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Dann definieren wir

$$z_n = \frac{u_n}{\|u_n|_Y\|}$$

und erhalten analog zu früher wegen

$$\frac{g(u_n)}{\|u_n|_Y\|} = \frac{g(u_n)}{u_n} \frac{u_n}{\|u_n|_Y\|}$$

und  $g(0) = 0$  (l'Hospital), dass  $z_n$  Lösung von

$$\Delta z_n + \gamma(u_n)z_n = \frac{h_n}{\|u_n|_Y\|} \quad \text{in } \Omega, \quad z_n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (37)$$

ist, wobei die Funktion  $\gamma$  durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{t}, & \text{falls } t \neq 0, \\ g'(0), & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Nach unseren Voraussetzungen ist die Funktion  $\gamma$  beschränkt. Somit folgt aus den Ergebnissen im 2. Kapitel und (37), dass eine reelle Zahl  $M_1$  mit  $\|z_n|_{C^{1+\alpha}}\| \leq M_1$  existiert. Verwenden wir

jetzt wieder die kompakte Einbettung von  $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$  in  $C^1(\overline{\Omega})$ , so ergibt sich, eventuell für eine Teilfolge, dass ein  $z^* \in X$  existiert mit  $\|z^*|Y\| = 1$  und

$$z_n \rightarrow z^*$$

im Banachraum  $C^1(\overline{\Omega})$ . Multiplizieren wir jetzt unsere Gleichung (37) mit einer beliebigen Funktion  $w \in C_0^\infty(\Omega)$  und integrieren anschließend, so ergibt sich

$$-\int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla z_n(x) dx + \int_{\Omega} w(x) \gamma(u_n(x)) z_n(x) dx = \int_{\Omega} \frac{w(x) h_n(x)}{\|u_n(x)|X\|} dx. \quad (38)$$

Wir bemerken, dass für alle  $x \in \Omega$  mit  $u_n(x) \rightarrow -\infty$  die Beziehung  $z^*(x) < 0$  gelten muss. Analog folgt  $z^*(x) > 0$  für alle  $x \in \Omega$  mit  $u_n(x) \rightarrow \infty$ . Wir setzen deshalb

$$m(x) = \begin{cases} g'(-\infty), & \text{falls } z^*(x) < 0, \\ g'(+\infty), & \text{falls } z^*(x) > 0, \\ g'(0), & \text{falls } z^*(x) = 0. \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$\gamma(u_n(x)) z_n(x) \rightarrow m(x) z^*(x)$$

punktweise in  $\Omega$ . Verwendet man jetzt den Satz von Lebesgue, so folgt für  $n \rightarrow \infty$  aus (38)

$$-\int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla z^*(x) dx + \int_{\Omega} w(x) m(x) z^*(x) dx = 0 \quad (39)$$

für alle  $w \in C_0^\infty(\Omega)$  und damit ist  $z^*$ , nach den gleichen Argumenten wie früher im Lemma 1, eine Lösung von

$$\Delta z^* + 1mz^* = 0 \text{ in } \Omega, \quad z^* = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Wegen  $\|z^*|Y\| = 1$  ist  $z^*$  eine nichttriviale Lösung dieses Eigenwertproblems. Somit existiert ein  $k \geq 1$  mit  $\lambda_k(m) = 1$ . Nach (36) folgt  $m < \lambda_2$  und mit dem Monotonieverhalten der Eigenwerte, dass  $\lambda_2(m) > \lambda_2(\lambda_2) = 1$  und somit  $\lambda_1(m) = 1$  gelten muss. Da die erste Eigenfunktion auf  $\Omega$  nicht das Vorzeichen wechselt, ergibt sich, dass  $m(x)$  entweder  $g'(-\infty)$  oder  $g(+\infty)$  sein muss. In beiden Fällen erhalten wir somit einen Widerspruch zu (36). Daraus folgt die a priori-Abschätzung  $\|u_n|Y\| \leq M$ . Dass die Abbildung  $F$  eigentlich, ergibt sich jetzt mit Lemma 2. ■

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Struktur der singulären Menge

$$\Sigma' = \{u \in X : F'(u) \notin Iso(X, Y)\}.$$

Es gilt dabei  $u \in \Sigma'$  genau dann, wenn das lineare Randwertproblem

$$\Delta v + g'(u)v = 0 \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Folglich muss  $\lambda_k(g'(u)) = 1$  für ein  $k \geq 1$  gelten. Da aber nach unseren Voraussetzungen  $g'(t) < \lambda_2$  für alle reellen  $t$  ist, erhalten wir wieder mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2, dass

$$\lambda_1(g'(u)) = 1$$

erfüllt sein muss, falls 1 ein Eigenwert ist.

**Lemma 6** (i) *Die Menge  $\Sigma'$  ist nichtleer, abgeschlossen und zusammenhängend.*

(ii) *Die Menge  $\Sigma'$  besteht nur aus gewöhnlichen singulären Punkten.*

**Beweis:** 1. *Schritt* Wir beweisen (i). Dazu zeigen wir, dass die Menge  $\Sigma'$  eine kartesische Darstellung auf einen linearen Teilraum  $W$  von  $X$  mit der Kodimension 1 hat.

Wir wählen  $z \in X$  mit  $z > 0$  auf  $\Omega$ . Dann sei  $W$  ein beliebiger linearer Teilraum von  $X$  mit  $z \notin W$ . Folglich hat  $W$  die Kodimension 1 in  $X$ , und jedes  $u \in X$  kann eindeutig durch

$$u = \sigma z + w, \quad \sigma \in \mathbb{R}, w \in W$$

dargestellt werden.

Wir definieren jetzt  $m_\sigma(x) = g'(u) = g'(\sigma z(x) + w(x))$  als Funktion von  $\sigma$  und betrachten nun nach den obigen Vorbetrachtungen den ersten Eigenwert  $\lambda_1(m_\sigma)$  des Eigenwertproblems

$$\Delta v + \lambda m_\sigma v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Nach den früheren Untersuchungen wissen wir, dass  $u = \sigma z + w$  zur singulären Menge  $\Sigma'$  genau dann gehört, wenn  $\lambda_1(m_\sigma) = 1$  gilt. Wegen  $z > 0$  in  $\Omega$  folgt  $m_\sigma > m_\mu$ , falls  $\sigma > \mu$  erfüllt ist. Das Monotonieverhalten der Eigenwerte, siehe Satz 9(ii) im Abschnitt 2.4, zeigt somit, dass die Funktion  $\lambda_1(m_\sigma)$  in Abhängigkeit von  $\sigma$  streng monoton fallend ist. Da  $z > 0$  in  $\Omega$ , ergibt sich weiter, dass

$$m_\sigma \rightarrow g'(\pm\infty) \quad \text{für } \sigma \rightarrow \pm\infty$$

punktweise, und da  $g'$  beschränkt ist, auch in  $L_q(\Omega)$  für alle  $q$ . Benutzen wir jetzt das Stetigkeitsverhalten der Eigenwerte bezüglich der  $L_q$ -Norm, siehe Satz 9(iv) im Abschnitt 2.4, so erhalten wir schließlich

$$\lambda_1(m_\sigma) \rightarrow \lambda_1(g'(-\infty)) = \frac{\lambda_1}{g'(-\infty)} > 1 \quad \text{für } \sigma \rightarrow -\infty, \quad (40)$$

$$\lambda_1(m_\sigma) \rightarrow \lambda_1(g'(+\infty)) = \frac{\lambda_1}{g'(+\infty)} < 1 \quad \text{für } \sigma \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

Da aber  $\lambda_1(m_\sigma)$  bezüglich  $\sigma$  streng monoton fallend (und stetig) ist, folgt aus (40) und (41), dass eine *eindeutig bestimmte* reelle Lösung  $\sigma^*$  existiert mit  $\lambda_1(m_{\sigma^*}) = 1$ . Die Gerade  $\sigma z + w$  ist also *transversal* zu  $\Sigma'$ . Da die zugehörige Funktion  $u^* = \sigma^* z + w$  zu  $\Sigma'$  gehört und  $\lambda_1$  stetig von  $w$  abhängt, folgt hieraus (i).

2. *Schritt* Es sei  $u \in \Sigma'$ . Wir zeigen, dass  $u$  ein gewöhnlicher singulärer Punkt ist. Zunächst wissen wir, dass  $\lambda_1(g'(u)) = 1$  gilt. Da der erste Eigenwert aber einfach ist, ergibt sich hieraus die Bedingung (i) aus Abschnitt 5.3, d.h.,  $\ker F'(u)$  ist eindimensional. Damit wird  $\ker F'(u)$  durch eine nichttriviale Funktion  $\varphi$  aufgespannt, die auf  $\Omega$  nicht das Vorzeichen wechselt. Außerdem gilt nach der Fredholm-Alternative  $h \in R(F'(u))$  genau dann, wenn  $\int_{\Omega} h(x)\varphi(x)dx = 0$  erfüllt ist. Somit existiert ein Funktional  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\langle \psi, h \rangle = \int_{\Omega} h(x)\varphi(x)dx$$

und  $R(F'(u)) = \ker \psi$ . Damit ist auch die Bedingung (ii) aus Abschnitt 5.3. Wir müssen also nur noch zeigen, dass auch die Bedingung (iv) von Definition 6 im Abschnitt 5.3. erfüllt ist. Zunächst erhalten wir

$$F''(u)[v, w] = g''(u)vw.$$

Damit folgt aber

$$\langle \psi, F''(u)[\varphi, \varphi] \rangle = \int_{\Omega} g''(u(x))\varphi^3(x)dx.$$

Da nach Voraussetzung  $g''(\tau) > 0$ , siehe Bedingung (35), und  $\varphi$  auf  $\Omega$  entweder stets positiv oder stets negativ ist, folgt

$$\langle \psi, F''(u)[\varphi, \varphi] \rangle \neq 0.$$

Damit ist  $u$  nach Definition 6 im Abschnitt 5.3 aber ein gewöhnlicher singulärer Punkt, und das Lemma ist bewiesen. ■

Abschließend müssen wir nur noch die Menge  $F(\Sigma')$  untersuchen.

**Lemma 7** *Die Gleichung  $F(u) = h$  hat für alle  $h \in F(\Sigma')$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .*

**Beweis:** Da  $h \in F(\text{Sigma}')$  gilt, existiert ein  $u \in \Sigma'$  mit  $F(u) = h$ . Wir nehmen jetzt indirekt an, dass ein  $v \neq u$  existiert mit  $F(v) = h$ . Dann definieren wir

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{g(v(x)) - g(u(x))}{v(x) - u(x)} & \text{für alle } x \in \Omega : u(x) \neq v(x), \\ g'(u(x)) & \text{für alle } x \in \Omega : u(x) = v(x). \end{cases}$$

Aus  $F(u) = F(v) = h$  folgt, dass die Funktion  $w = v - u$  eine nichttriviale Lösung des Eigenwertproblems

$$\Delta w + 1\omega w = 0 \text{ in } \Omega, \quad w = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

sein muss. Somit existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\lambda_k(\omega) = 1$ . Da nach Voraussetzung

$$g'(-\infty) < \omega < g'(+\infty) < \lambda_2$$

gilt, erhalten wir wegen  $\lambda_2(\omega) > \lambda_2(\lambda_2) = 1$  wieder  $\lambda_1(\omega) = 1$ . Folglich ändert  $w = v - u$  auf  $\Omega$  nicht das Vorzeichen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $w > 0$  auf  $\Omega$ , d.h., es gilt  $v > u$  auf  $\Omega$ . Da nach Bedingung (35) die Funktion  $g$  konvex auf  $\mathbb{R}$  ist, ergibt sich  $\omega(x) > g'(u(x))$  auf  $\Omega$  und damit  $1 = \lambda_1(\omega) < \lambda_1(g'(u))$ .

Da aber nach unseren Vorbetrachtungen aus  $u \in \Sigma'$  stets  $\lambda_1(g'(u)) = 1$  folgt, erhalten wir einen Widerspruch. Damit ist (ii) auch bewiesen. ■

Verwenden wir jetzt unser Satz 6 aus Abschnitt 5.3, so erhalten wir mittels Lemma 5 – 7 folgendes Ergebnis vom Ambrosetti–Prodi-Typ.

**Satz 7** Die Funktion  $g \in C^2(\mathbb{R})$  erfülle (35), (36). Dann existiert eine abgeschlossene zusammenhängende  $C^1$ -Mannigfaltigkeit  $M_1$  mit Kodimension 1 in  $C^\alpha(\overline{\Omega})$ , so dass die Menge  $C^\alpha(\overline{\Omega}) \setminus M_1$  aus zwei zusammenhängenden Komponenten  $M_0$  und  $M_2$  besteht, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (i) falls  $h \in M_0$ , so hat Problem (1) **keine** Lösung;
- (ii) falls  $h \in M_1$ , so hat Problem (1) **genau eine** Lösung  $u \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ;
- (iii) falls  $h \in M_2$ , so hat Problem (1) **genau zwei** Lösungen in  $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

**Bemerkung 4** Das obige Satz wurde durch A. Ambrosetti, G. Prodi (1972) bewiesen. Bei den Untersuchungen von Problemen mit asymmetrischen Nichtlinearitäten kann man viele wichtigen Phänomene dadurch behandeln, indem man zu folgendem Standardproblem übergeht. Dabei ersetzt man die nichtlineare Funktion  $g(\cdot)$  durch die „asymptotische“ Funktion

$$g(\tau) = \beta\tau^+ - \alpha\tau^- + b(\tau)$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq \alpha$ ,  $\tau^+ = \max(\tau, 0)$ ,  $\tau^- = \tau^+ - \tau$  und beschränkter Funktion  $b$ . Im Falle von Satz 7 hat man insbesondere

$$\alpha = g'(-\infty) < g'(+\infty) = \beta.$$

Abschließend wollen wir uns mit einem konkreten Problem in dieser Richtung beschäftigen. Dabei werden wir mit der sogenannten iterativen Methode (konstruktive numerische Methode) der *Unter- und Oberlösungen* arbeiten. Dafür wird wieder die Verwendung des Maximum-Prinzips entscheidend sein. Weiterhin benutzen wir jetzt folgende Darstellung der nichtlinearen Funktion  $g$  und der rechten Seite  $h$ .

Wir zerlegen die rechte Seite in

$$h(x) = -t\varphi_1(x) - \eta(x), \quad \int_{\Omega} \eta(x)\varphi_1(x)dx = 0, \quad (42)$$

wobei  $\varphi_1 > 0$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda_1$  mit  $\|\varphi_1\|_{L_2} = 1$  ist und somit  $\eta \perp \varphi_1$  gilt. Für die nichtlineare Funktion  $g$  verwenden wir

$$g(x, \tau) = \beta\tau^+ - \alpha\tau^- + b(x, \tau), \quad b(x, \tau) = b(\tau) + \eta(x).$$

Damit hat unser Ausgangsproblem (1)  $-\Delta u = g(u) - h$  in  $\Omega$  mit homogener Dirichlet-Randbedingung folgende Form

$$-\Delta u = g(x, u) + t\varphi_1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (P_t)$$

Wir untersuchen jetzt  $(P_t)$  in Abhängigkeit vom reellen Parameter  $t$ . Es lässt sich zunächst zeigen, dass im Falle

$$\lambda_k \notin [\alpha, \beta], \quad k \in \mathbb{N},$$

unser Problem  $(P_t)$  für alle reellen  $t$  lösbar ist. Im anderen Fall kann man die folgende Aussage beweisen.

**Satz 8** Die Funktion  $b(x, \tau)$  gehöre zu  $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  und es existiere eine Zahl  $M > 0$  mit

$$|b(x, \tau)| \leq M \quad \text{für alle } (x, \tau) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Weiterhin gelte für die Funktion  $g(x, \tau) = \beta\tau^+ - \alpha\tau^- + b(x, \tau)$  die Bedingung

$$-\infty < \alpha < \lambda_1 < \beta < +\infty.$$

Dann existiert eine reelle Zahl  $t^*$  mit folgender Eigenschaft:

- (i) Falls  $t \leq T^*$  gilt, so hat  $(P_t)$  mindestens **eine** Lösung in  $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .
- (ii) Falls  $t > T^*$  ist, so hat  $(P_t)$  **keine** Lösung.

Zum Beweis verwenden wir, wie bereits oben erwähnt, die konstruktive Methode der Ober- und Unterlösungen (super-/subsolution, upper/lower solution).

Eine Funktion  $u_+ \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  heißt *Oberlösung* von

$$-\Delta u = \gamma(x, u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad (43)$$

falls

$$-\Delta u_+ \geq \gamma(x, u_+) \text{ in } \Omega, \quad u_+ = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad (44)$$

gilt. Analog definiert man eine *Unterlösung*  $u_- \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  von (43) mit

$$-\Delta u_- \leq \gamma(x, u_-) \text{ in } \Omega, \quad u_- = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad (45)$$

Mittels Maximum-Prinzip lässt sich dann folgende Aussage beweisen.

**Lemma 8** Die Funktion  $\gamma(x, \tau)$  sei differenzierbar auf  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ . Falls das Problem (43) eine Oberlösung  $u_+$  und eine Unterlösung  $u_-$  mit  $u_- \leq u_+$  auf  $\Omega$  besitzt, so hat (43) eine Lösung  $u \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  mit  $u_- \leq u \leq u_+$  auf  $\overline{\Omega}$ .

**Beweis:** Wir wählen  $\omega > 0$ , so dass

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi}(x, \xi) + \omega > 0$$

für alle  $x \in \overline{\Omega}$  und alle  $\xi \in [\min_{x \in \overline{\Omega}} u_-(x), \max_{x \in \overline{\Omega}} u_+(x)]$  gilt. Nun definieren wir den Operator

$$T : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

durch  $v = Tu$ , falls  $v$  das lineare Randwertproblem

$$-\Delta v + \omega v = \gamma(x, u) + \omega u \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

erfüllt. Da  $\omega > 0$  gilt, existiert nach der linearen Theorie genau ein derartiges  $v \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Somit ist die Definition des Operators  $T$  korrekt.

Als nächstes zeigen wir, dass  $T$  ein *monotoner* Operator ist: Falls  $u \leq v$  in  $\Omega$  gilt, so folgt

$Tu \leq Tv$  in  $\Omega$ .

Wir haben nach Definition

$$\begin{aligned} -\Delta Tu + \omega Tu &= \gamma(x, u) + \omega u \text{ in } \Omega, \\ -\Delta Tv + \omega Tv &= \gamma(x, v) + \omega v \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

sowie  $Tu = Tv = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Setzen wir jetzt  $w = Tv - Tu$ , so erhalten wir

$$-\Delta w + \omega w = (\gamma(x, v) - \gamma(x, u)) + \omega(v - u) \text{ in } \Omega, \quad w = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Nach der Wahl von  $\omega > 0$  ist die Funktion

$$\Gamma : (x, \xi) \mapsto \gamma(x, \xi) + \omega \xi$$

bezüglich  $\xi$  wachsend. Somit erhalten wir wegen  $v \geq u$  in  $\Omega$

$$0 \leq \Gamma(x, v) - \Gamma(x, u) = (\gamma(x, v) - \gamma(x, u)) + \omega(v - u) = -\Delta w + \omega w,$$

d.h.,

$$-\Delta w + \omega w \geq 0 \text{ in } \partial\Omega, \quad w = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Verwenden wir jetzt das Maximum-Prinzip, so ergibt sich  $w \geq 0$  und damit schließlich  $Tv \geq Tu$ .

Wir beschreiben jetzt das *iterative* Verfahren zur Bestimmung der Lösung  $u$ . Wir starten dabei mit  $u_1 = Tu_+$ . Dann ist

$$-\Delta u_1 + \omega u_1 = \gamma(x, u_+) + \omega u_+ \text{ in } \Omega, \quad u_1 = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_+) + \omega(u_1 - u_+) &= \gamma(x, u_+) + \omega u_+ - (-\Delta u_+ + \omega u_+) \\ &\leq \gamma(x, u_+) + \omega u_+ - \gamma(x, u_+) - \omega u_+ = 0 \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

und  $u_1 - u_+ = -u_+ = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Verwenden wir erneut das Maximum-Prinzip, so folgt  $u_1 - u_+ \leq 0$  in  $\Omega$ , d.h.,  $u_1 = Tu_+ \leq u_+$  in  $\Omega$ .

Nun definieren wir  $u_2 = Tu_1$ . Da  $T$  monoton ist, erhalten wir wegen  $u_1 \leq u_+$  auf  $\Omega$ , dass  $Tu_1 \leq Tu_+$ , d.h.,  $u_2 \leq u_1$  in  $\Omega$ . Iterativ konstruieren wir jetzt mittels  $u_{n+1} = Tu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die monoton fallende Folge

$$u_+ \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots$$

Analog definiert man, beginnend mit dem Startwert  $u_-$ , eine monoton wachsende Folge

$$u_- \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots$$

mit  $v_1 = Tu_-$  und  $v_{n+1} = Tv_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Weiterhin folgt aus  $u_- \leq u_+$  in  $\Omega$  auch  $Tu_- \leq Tu_+$ , d.h.,  $v_1 \leq u_1$  auf  $\Omega$ . Iterativ ergibt sich somit  $v_n \leq u_n$  auf  $\Omega$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und damit

$$u_- \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 \leq u_+$$

in  $\Omega$  und  $u_n = v_n = 0$  auf  $\partial\Omega$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit besitzen die beiden Folgen

$$\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \{v_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

einen punktweisen Grenzwert

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \quad \tilde{v}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x).$$

Wir zeigen nun, dass  $\tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  Fixpunkte von  $T$  sind, d.h., es gilt  $\tilde{u} = T\tilde{u}$  und  $\tilde{v} = T\tilde{v}$ . Mittels Abbildungseigenschaften des linearen Problems  $-\Delta + \omega$  unter homogener Dirichlet-Randbedingung und der Glattheit von  $\gamma(x, \xi)$  folgt zunächst aus der punktweisen Konvergenz der Folgen in  $L_\infty(\Omega)$  auch die Konvergenz der Bildfolgen in  $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ , und damit mittels bootstrap-Argumenten die Konvergenz der Iteration in  $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ . Es gilt also

$$\tilde{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_{n-1} = T(\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n-1}) = T\tilde{u}.$$

Analog kann man die Aussage für  $\tilde{v}$  zeigen. Damit ist der Beweis des Lemmas beendet. ■

Zur Herleitung von Satz 8 verwenden wir Lemma 8. Wir müssen also die Existenz von Unter- und Oberlösungen  $u_\pm$  mit  $u_- \leq u_+$  in  $\Omega$  nachweisen. Als erstes zeigen wir, dass das Problem  $(P_t)$  für alle reellen Zahlen  $t$  zwar stets eine Unterlösung besitzt, jedoch nur für hinreichend kleines  $t$  auch eine Oberlösung hat.

**Lemma 9** *Für alle reellen  $t$  besitzt  $(P_t)$  eine Unterlösung.*

**Beweis:** Nach unseren Voraussetzungen gilt

$$\alpha < \lambda_1 < \beta, \quad |b(\cdot, \cdot)| \leq M.$$

Damit erhalten wir wegen  $g(x, \tau) = \beta\tau^+ - \alpha\tau^- + b(x, \tau)$ ,  $\tau = \tau^+ - \tau^-$ ,

$$g(x, u) \geq \alpha u^+ - \alpha u^- - M = \alpha u - M. \quad (46)$$

Wir betrachten jetzt das lineare Randwertproblem

$$-\Delta u = \alpha u - M + t\varphi_1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (47)$$

Da  $\alpha < \lambda_1$  gilt, folgt mit Satz 2 aus Abschnitt 2, dass (47) für jede reelle Zahl  $t$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $v_t \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  besitzt. Wegen (46) erhalten wir weiter

$$-\Delta v_t = \alpha v_t - M + t\varphi_1 \leq g(x, v_t) + t\varphi_1$$

auf  $\Omega$ . Somit ist  $v_t$  eine Unterlösung von Problem  $(P_t)$ . ■

**Lemma 10** *Falls  $w_t$  eine Oberlösung von Problem  $(P_t)$  ist, so gilt*

$$w_t \geq v_t.$$

**Beweis:** Es sei  $t$  fixiert und  $w_t$  eine Oberlösung von  $(P_t)$ . Die im letzten Lemma definierte Unterlösung  $v_t$  von  $(P_t)$  erfüllt die Gleichung (47). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} -\Delta(w_t - v_t) &\geq g(x, w_t) + t\varphi_1 + \Delta v_t \\ &= g(x, w_t) + t\varphi_1 - (\alpha v_t - M + t\varphi_1) \\ &= g(x, w_t) + M - \alpha v_t \end{aligned}$$

in  $\Omega$ . Nach (46) gilt somit

$$-\Delta(w_t - v_t) \geq (g(x, w_t) + M) - \alpha v_t \geq \alpha(w_t - v_t) \quad \text{in } \Omega, \quad w_t - v_t = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Da  $\alpha < \lambda_1$  erfüllt ist, können wir das Maximum-Prinzip, siehe Satz 3 aus Abschnitt 2, anwenden und erhalten  $w_t - v_t \geq 0$  in  $\Omega$ . ■

**Lemma 11** *Es existiert eine reelle Zahl  $t^*$  mit der Eigenschaft, dass das Problem  $(P_t)$  für alle  $t \leq t^*$  eine Oberlösung  $w_t$  hat.*

**Beweis:** Für fixiertes  $\sigma > 0$  wählen wir eine Zahl  $m > 0$  derart, dass

$$m \geq \max\{g(x, \tau) : x \in \Omega, 0 \leq \tau \leq \sigma\} \tag{48}$$

gilt. Außerdem sei  $\Omega' \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  und  $|\Omega'| < \varepsilon$  gegeben, wobei wir  $\varepsilon > 0$  erst später festlegen. Wir definieren  $\Omega^* = \Omega \setminus \Omega'$ . Dann wählen wir  $\Omega'' \subset \Omega'$  mit  $\overline{\Omega''} \subset \Omega'$  und eine Funktion  $h \in C^\infty(\Omega)$  mit

$$0 \leq h \leq m \quad \text{in } \Omega, \quad h = 0 \quad \text{in } \Omega'', \quad h = m \quad \text{in } \Omega^*.$$

Es sei nun  $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\Delta\psi = h \text{ in } \Omega, \quad \psi = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Verwenden wir noch einmal das Maximum-Prinzip, so erhalten wir  $\psi \geq 0$  in  $\Omega$ . Aus der linearen Theorie erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\|\psi\|_{W_p^2} \leq c_1 \|h\|_{L_p} \leq c_2 \varepsilon^{1/p}$$

für alle  $p > 1$ . Wegen  $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\Omega)$  für  $p > n/2$  ergibt sich somit

$$\|\psi\|_{L_\infty} \leq c\varepsilon^{1/p}.$$

Wir wählen jetzt  $\varepsilon > 0$  so, dass  $c\varepsilon^{1/p} \leq \sigma$  gilt. Also haben wir  $0 \leq \psi \leq \sigma$  in  $\Omega$  und damit nach der Definition von  $m$ , siehe (48), die Eigenschaft

$$g(x, \psi(x)) \leq m \text{ in } \Omega. \quad (49)$$

Nun definieren wir die Zahlen

$$\varphi_0 = \min_{\overline{\Omega'}} \varphi_1(x) > 0, \quad t^* = -\frac{m}{\varphi_0} < 0.$$

Da  $\varphi_1 > 0$  in  $\Omega$  und  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  gilt, sind diese Definitionen sinnvoll. Wir zeigen jetzt, dass

$$t^*\varphi_1 + m \leq h \text{ in } \Omega \quad (50)$$

erfüllt ist.

Falls  $x \in \Omega'$  ist, so folgt nach Definition von  $\varphi_0$  und  $t^*$

$$t^*\varphi_1 + m = -\frac{m}{\varphi_0}\varphi_1 + m \leq 0 \leq h.$$

Falls  $x \in \Omega^*$  gilt, so erhalten wir wegen  $t^* < 0$ ,  $\varphi_1 > 0$  in  $\Omega$  die Abschätzung

$$t^*\varphi_1 + m < m = h.$$

Daraus ergibt sich aber (50). Benutzen wir nun (49) und (50), so folgt

$$-\Delta\psi = h \geq t^*\varphi_1 + m \geq g(x, \psi) + t^*\varphi_1,$$

und damit

$$-\Delta\psi \geq g(x, \psi) + t^*\varphi_1 \geq g(x, \psi) + t\varphi_1$$

für alle  $t \leq t^*$ . ■

Damit sind wir in der Lage, unseren Satz 8 zu beweisen.

**Beweis von Satz 8:** Man definiert die reelle Zahl  $T^*$  durch

$$T^* = \sup\{t \in \mathbb{R} : \text{Problem } (P_t) \text{ besitzt eine Oberlösung}\}.$$

Nach Lemma 11 gilt  $T^* > -\infty$ . Wir zeigen, dass auch  $T^* < \infty$  erfüllt ist.

Falls das Problem  $(P_t)$  eine Oberlösung  $w_t$  (oder eine Lösung) hat, so ist

$$\Delta w_t \geq g(x, w_t) + t\varphi_1 \quad \text{in } \Omega, \quad w_t = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Multiplizieren wir mit  $\varphi_1$  und integrieren anschließend, so folgt mit  $\|\varphi_1\|_{L_2} = 1$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1(x) w_t(x) dx &\geq \int_{\Omega} \varphi_1(x) g(x, w_t(x)) dx + t \\ &= \int_{\Omega} \varphi_1(x) [\beta w_t^+(x) - \alpha w_t^-(x)] dx + \int_{\Omega} \varphi_1(x) b(x, w_t(x)) dx + t. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Abschätzung für den Parameter  $t$ :

$$\begin{aligned} t &\leq \int_{\Omega} \lambda_1 \varphi_1(x) w_t(x) dx - \int_{\Omega} \varphi_1(x) [\beta w_t^+(x) - \alpha w_t^-(x)] dx + M \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega} [\lambda_1 w_t(x) + \alpha w_t^-(x) - \beta w_t^+(x)] \varphi_1(x) dx + c, \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $c$  durch  $c = M \int_{\Omega} \varphi_1(x) dx$  gegeben ist. Wegen  $\alpha < \lambda_1 < \beta$ ,  $\varphi_1 > 0$  in  $\Omega$  ergibt sich aus der letzten Ungleichung unter Beachtung von

$$\lambda_1 w_t + \alpha w_t^- - \beta w_t^+ = \lambda_1 w_t^+ - \beta w_t^+ - \lambda_1 w_t^- + \alpha w_t^- < 0,$$

dass  $t \leq c < \infty$  und somit  $T^* < \infty$  gelten muss. Verwenden wir nun Lemma 8 – Lemma 11, so folgt die Aussage für alle  $t < T^*$ . Mittels Grenzübergang  $t \rightarrow T^*$  können wir dann den Beweis unseres Satzes beenden. ■

E n d e   d e r   V o r l e s u n g